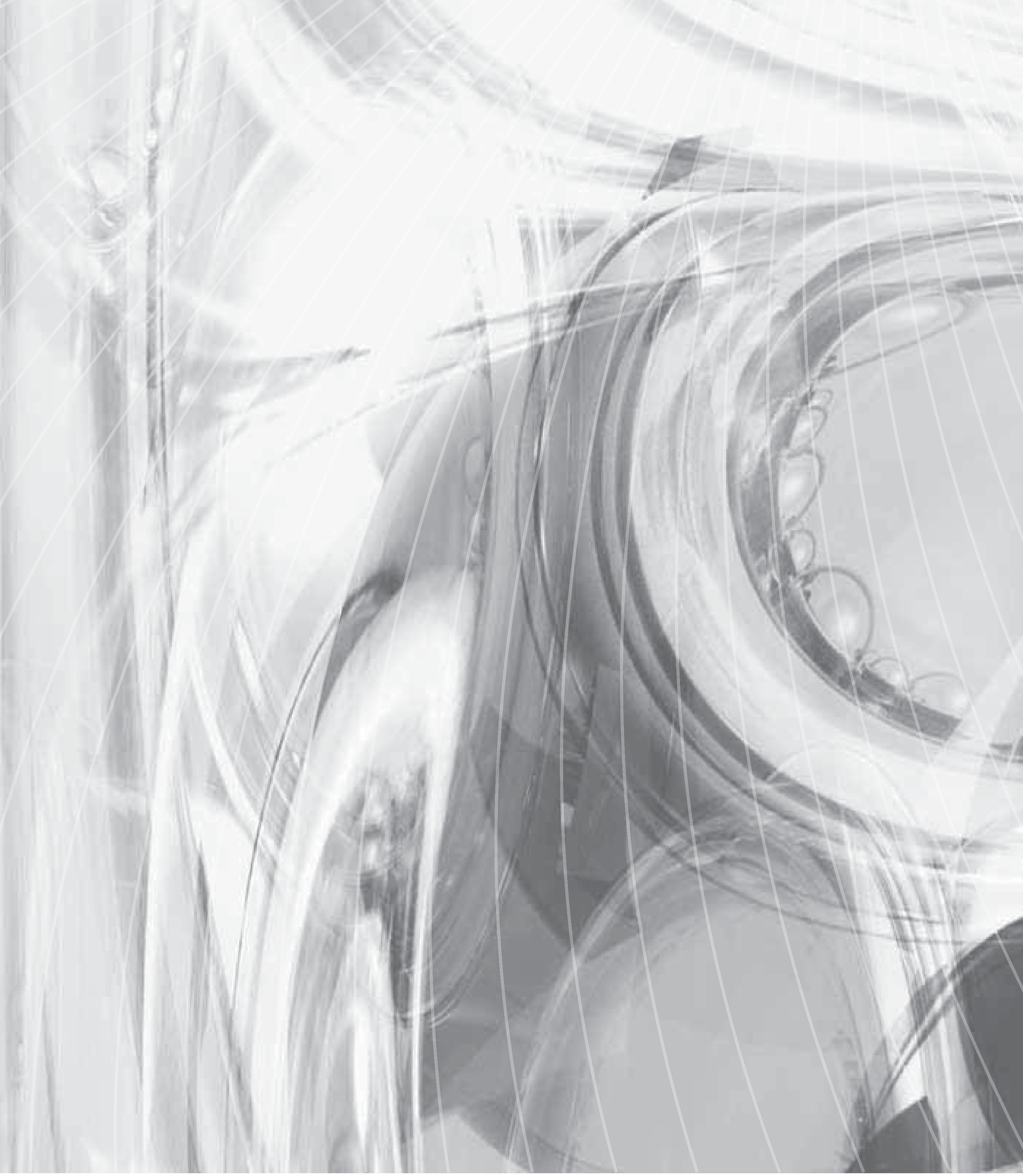
Geometría y trigonometría



Capítulo 1

Conceptos básicos

Geometría (del griego *geo*, "tierra"; *METREIN*, "MEDIR")

LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DE LA GEOMETRIA
DE EUCLIDES.

Los seis libros primeros de la geometría de Euclides

Rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con 4 o más dimensiones, geometría fractal y geometría no euclídea.

Geometría plana

Rama de la geometría elemental que estudia las propiedades de superficies y figuras planas, como el triángulo o el círculo. Esta parte de la geometría también se conoce como geometría euclídea, en honor al matemático griego Euclides, el primero en estudiarla en el siglo IV a.C. Su extenso tratado *Los seis libros primeros de la geometría* se mantuvo como texto autorizado de geometría hasta la aparición de las llamadas geometrías no Euclídeas en el siglo XIX.

Matemáticas simplificadas

Conceptos básicos

Antes de iniciar el estudio de la geometría y trigonometría, analizaremos algunos conceptos básicos:

Geometría. Rama de las matemáticas que estudia las propiedades, las formas y las dimensiones de figuras y cuerpos geométricos.

Punto. Según Euclides: "Punto es lo que no tiene partes", para evitar confusiones al dar una definición más compleja sólo diremos que la idea de punto, nos la da la marca que deja un lápiz sobre el papel, tan pequeña que carece de dimensión.

Línea recta. Sucesión infinita de puntos que tienen la siguiente forma:

Recta $\overleftrightarrow{AB}$

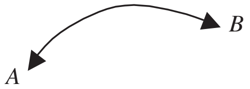
Semirrecta. Si se fija un punto C en una recta, al conjunto de puntos que le siguen o preceden se le llama semirrecta.

Semirrecta $\overrightarrow{CD}$

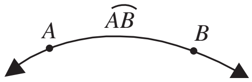
Segmento. Porción de recta limitada por 2 puntos no coincidentes.

Segmento $\overline{CD}$

Curva. Es aquella línea que no tiene partes rectas.

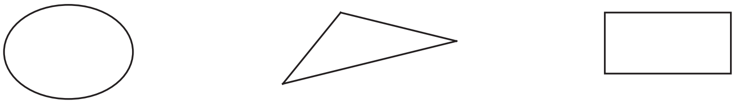


Arco. Porción de curva limitada por 2 puntos no coincidentes.



Arco $\widehat{AB}$

Figura geométrica. Extensión limitada por puntos, líneas y superficies.



Cuerpo sólido. Es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio y posee longitud, anchura y altura.

Proposición. Enunciado que nos propone algo y que por tanto se puede calificar como falso o verdadero.

Axioma. Proposición evidente que no requiere demostración.

Ejemplos

Dos puntos diferentes determinan una recta y sólo una.

Sobre cualquier recta hay al menos 2 puntos diferentes.

Postulado. Proposición cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma se admite sin demostración.

Ejemplos

Dos rectas determinan un punto y sólo uno.

Siempre es posible describir una circunferencia de centro y radio dado.

Teorema. Proposición cuya verdad necesita demostración.

Ejemplos

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo son 180°.

Corolario. Proposición que es consecuencia inmediata de otra.

Ejemplo

Del postulado de Euclides: "Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta". Se obtiene el siguiente corolario: "Dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí".

Lema. Proposición que sirve para facilitar la demostración de un teorema.

Ejemplos

Toda línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que tenga los mismos extremos.

Un ángulo no nulo y no llano divide al plano en 2 regiones, de tal suerte que en una y sólo una de las regiones, 2 puntos cualesquiera siempre pueden unirse por un segmento que no interseca ninguna de las 2 semirrectas que forman el ángulo.

CAPÍTULO 2

ÁNGULOS

Sistema SEXAGESIMAL

Definiciones de ángulos del libro
Los elementos de Euclides

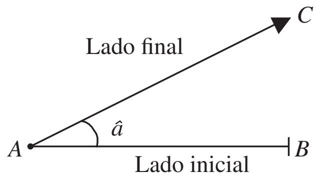
Es un sistema de numeración posicional que emplea la base sesenta. Tuvo su origen en la antigua Babilonia.

A diferencia de la mayoría de los demás sistemas de numeración, el sexagesimal no se usa mucho en la computación general ni en la lógica, pero sí en la medición de ángulos y coordenadas geométricas. La unidad estándar en sexagesimal es el grado. Una circunferencia se divide en 360 grados. Las divisiones sucesivas del grado dan lugar a los minutos de arco (1/60 de grado) y segundos de arco (1/60 de minuto).

Quedan vestigios del sistema sexagesimal en la medición del tiempo. Hay 24 horas en un día, 60 minutos en una hora y 60 segundos en un minuto. Las unidades menores que un segundo se miden con el sistema decimal.

Definición

Un ángulo es la abertura comprendida entre 2 semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.



El ángulo se representa como $\angle A$, $\angle BAC$, $\hat{a}$, o con letras del alfabeto griego. Si un ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, entonces es positivo, si se mide en el mismo sentido entonces será negativo.

Medidas

Los ángulos se miden en grados o radianes de acuerdo al sistema.

Sistema sexagesimal

Este sistema de medir ángulos es el que se emplea normalmente: la circunferencia se divide en 360 partes llamadas grados, el grado en 60 partes llamadas minutos y el minuto en 60 partes que reciben el nombre de segundos.

$$1° = 60'; \quad 1' = 60''$$

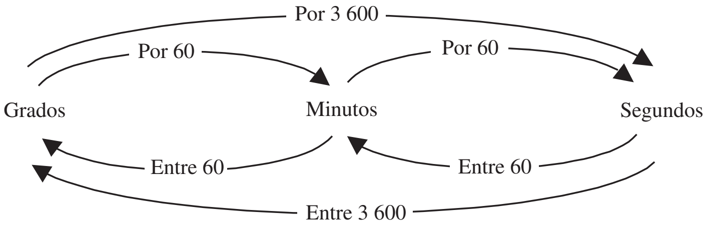
Ejemplos

A continuación se dan 3 números en sistema sexagesimal:

a) 45°
b) 21° 36'
c) 135° 28' 32"

Relación de conversión

Es la relación que existe entre los grados, minutos y segundos de un ángulo expresado en sistema sexagesimal.



De acuerdo con la gráfica, se establecen las siguientes condiciones de conversión:

- Para convertir de una unidad mayor a una menor se multiplica por 60 o 3 600, según sea el caso.
- Para convertir de una unidad menor a una mayor se divide entre 60 o 3 600, según sea el caso.

EJEMPLOS

1 Convierte 19° 47’ 23” a grados.

Solución

Los minutos se dividen entre 60 y los segundos entre 3 600:

$$19°\ 47'\ 23'' = 19° + \left(\frac{47}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{23}{3600}\right)^{\circ} = 19° + 0.7833° + 0.0063° = 19.7896°$$

Por tanto, 19° 47’ 23” equivalen a 19.7897°.

2 Convierte 32° 12’ 15” a minutos.

Solución

Los grados se multiplican por 60 y los segundos se dividen entre 60:

$$32°\ 12'\ 15'' = (32)(60)' + 12' + \left(\frac{15}{60}\right)' = 1\,920' + 12' + 0.25' = 1\,932.25'$$

Por consiguiente 32° 12’ 15” equivalen a 1 932.25’.

3 Convierte 45.5638° a grados, minutos y segundos.

Solución

La parte decimal de 45.5638° se multiplica por 60 para convertir a minutos:

$$45.5638° = 45° + (.5638)(60') = 45°\ 33.828'$$

La parte decimal de los minutos se multiplica por 60 para obtener los segundos:

$$45°\ 33.828' = 45°\ 33' + (.828)(60'') = 45°\ 33'\ 49.68''$$

EJERCICIO 1

Convierte los siguientes ángulos a grados:

1. 40° 10’15”
2. 61° 42’21”
3. 1° 2’ 3”
4. 73° 40’40”
5. 9° 9’ 9”
6. 98° 22’45”

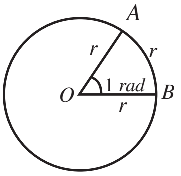
Convierte los siguientes ángulos a su equivalente en grados, minutos y segundos:

7. 40.32°
8. 61.24°
9. 18.255°
10. 29.411°
11. 19.99°
12. 44.01°

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema cíclico o circular

Este sistema utiliza como unidad fundamental al radián. El radián es el ángulo central subtendido por un arco igual a la longitud del radio del círculo. Se llama valor natural o valor circular de un ángulo.



Un radián (1 *rad*) equivale a 57.29° y π *rad* equivalen a 180°.

Conversión de grados a radianes y de radianes a grados

Sea S un ángulo en sistema sexagesimal (grados) y R en el sistema cíclico (radianes), entonces para convertir:

Grados a radianes	Radianes a grados
Se multiplica el número de grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$ y se simplifica, esto es: $$S\left(\frac{\pi}{180°}\right)$$	Se multiplica el número de radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$ y se simplifica, esto es: $$R\left(\frac{180°}{\pi}\right)$$

EJEMPLOS

1 Convierte 150° a radianes.

Solución

Se multiplica 150° por el factor $\frac{\pi}{180°}$

$$150° = 150°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{150°\pi}{180°} = \frac{5}{6}\pi$$

Por consiguiente, 150° es equivalente a $\frac{5}{6}\pi$ *rad*.

2 Convierte a grados $\frac{7}{4}\pi$ *rad*.

Solución

Se multiplica por el factor $\frac{180°}{\pi}$ y se simplifica al máximo, obteniendo:

$$\frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{7(180°)\pi}{4\pi} = \frac{7(180°)}{4} = 315°$$

Finalmente, $\frac{7}{4}\pi$ *rad* equivalen a 315°.

3 Convierte 12° 15’ 36” a radianes.

Solución

Se convierte a grados el ángulo:

$$12°\ 15'\ 36'' = 12° + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{36}{3600}\right)^{\circ} = 12° + 0.25° + 0.01° = 12.26°$$

La conversión a grados se multiplica por el factor $\frac{\pi}{180°}$ y se simplifica a su mínima expresión:

$$12.26°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{12.26°\pi}{180°} = \frac{1\,226\pi}{18\,000} = \frac{613\pi}{9\,000}\ rad$$

Por tanto, 12° 15’ 36” es equivalente a $\frac{613\pi}{9\,000}$ *rad.*

4 Expresa un ángulo θ que mide 3 radianes en grados, minutos y segundos.

Solución

Para convertir de radianes a grados se multiplica por el factor $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$

$$3\ rad = 3\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 171.8873°$$

La parte decimal se convierte en minutos,

$$171.8873° = 171° + (0.8873)(60') = 171°\ 53.238'$$

El nuevo decimal se convierte en segundos, entonces:

$$171.8873° = 171°\ 53' + (0.238)(60'') = 171°\ 53'\ 14.28''$$

EJERCICIO 2

Transforma a radianes los siguientes ángulos:

1. 210°
2. 300°
3. 225°
4. 450°
5. 72°
6. 100°
7. 30°
8. 330°
9. 120°
10. 135°
11. 45.23°
12. 128.30°
13. 150° 36’ 40”
14. 420° 0’ 45”

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

EJERCICIO 3

Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

1. $\frac{2}{3}\pi$
2. $\frac{11}{6}\pi$
3. $\frac{3}{4}\pi$
4. $\frac{4}{3}\pi$
5. 7π
6. $\frac{1}{9}\pi$
7. $\frac{13}{5}\pi$
8. $\frac{1}{12}\pi$
9. 1.5708 *rad*
10. 4.7124 *rad*
11. 0.1683 *rad*
12. 1.1201 *rad*
13. 6.2832 *rad*
14. 0.5 *rad*

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones

A continuación se presentan las operaciones básicas con ángulos: suma, resta, multiplicación y división.

EJEMPLOS

1 Efectúa la suma de los siguientes ángulos: 29° 38’ 22”; 18° 47’ 52”; 36° 42’ 37”

Solución

Se acomodan en forma vertical de acuerdo a su orden:

$$\begin{array}{rrrr} & 29° & 38' & 22'' \\ + & 18° & 47' & 52'' \\ & 36° & 42' & 37'' \\ \hline & 83° & 127' & 111'' \end{array}$$

Pero 111” = 1’ 51”

$$83°\ 127'\ 111'' = 83°\ 127' + 1'\ 51'' = 83°\ 128'\ 51''$$

y 128’ = 2° 08’

$$83°\ 128'\ 51'' = 83° + 2°\ 08'\ 51'' = 85°\ 08'\ 51''$$

Por tanto, el resultado es: 85° 08’ 51”.

2 Realiza lo que se indica: Resta 24° 42’ 18” de 138° 29’ 17”

Solución

Se acomodan en forma vertical:

$$\begin{array}{rrrr} & 138° & 29' & 17'' \\ - & 24° & 42' & 18'' \\ \hline \end{array}$$

Dado que 42’ > 29’ y 18” > 17”, entonces 138° 29’ 17” se transforman en

$$138°\ 29'\ 17'' = 137°\ 89'\ 17'' = 137°\ 88'\ 77''$$

Y se realiza la resta,

$$\begin{array}{rrrr} & 137° & 88' & 77'' \\ - & 24° & 42' & 18'' \\ \hline & 113° & 46' & 59'' \end{array}$$

Finalmente, se concluye que el resultado es 113° 46’ 59”.

3 Multiplica 73° 16’ 32” por 29.

Solución

$$\begin{array}{rrr} 73^\circ & 16' & 32'' \\ \times & & 29 \\ \hline 2\,117^\circ & 464' & 928'' \end{array}$$

El resultado que se obtiene se simplifica, al transformar los segundos a minutos:

$$2\,117^\circ\ 464'\ 928'' = 2\,117^\circ\ 464' + 15'\ 28'' = 2\,117^\circ\ 479'\ 28''$$

Y después minutos a grados:

$$2\,117^\circ\ 479'\ 28'' = 2\,117^\circ + 7^\circ\ 59'\ 28'' = 2\,124^\circ\ 59'\ 28''$$

Por tanto, el resultado es: 2 124° 59’ 28”.

4 Encuentra la novena parte de 165° 48’ 29”.

Solución

Se dividen los grados entre 9:

$$\begin{array}{r|lll} & 18^\circ & & \\ \hline 9 & 165^\circ & 48' & 29'' \\ & 3^\circ & & \end{array}$$

El residuo se transforma a minutos y se suma con 48’,

$$\begin{array}{r|lll} & 18^\circ & & \\ \hline 9 & 165^\circ & 48' & 29'' \\ & 3^\circ = & \underline{180'} & \\ & & 228' & \end{array}$$

Ahora 228’ se divide entre 9 y el residuo se transforma a segundos,

$$\begin{array}{r|lll} & 18^\circ & 25' & \\ \hline 9 & 165^\circ & 48' & 29'' \\ & 3^\circ = & \underline{180'} & \\ & & 228' & 29'' \\ & & 3' = & \underline{180''} \\ & & & 209'' \end{array}$$

Finalmente, 209” se divide entre 9:

$$\begin{array}{r|lll} & 18^\circ & 25' & 23'' \\ \hline 9 & 165^\circ & 48' & 29'' \\ & 3^\circ = & \underline{180'} & \\ & & 228' & 29'' \\ & & 3' = & \underline{180''} \\ & & & 209'' \\ & & & 2'' \end{array}$$

EJERCICIO 4

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 40° 30' 18" + 15° 16' 32"
2. 25° 30" + 15° 12' 45"
3. 36° 42' 28" + 10° 23' 40" + 2° 13' 25"
4. 180° – 120° 40' 15"
5. 213° 25' 13" – 105° 17' 25"
6. 90° – 14° 15' 38"
7. 14° 30' 15" × 17
8. 35° 28" × 25
9. 25° 35' 25.4" × 15
10. 25° 13' 42" × 9
11. 26 ⟌ 118° 23'
12. 8 ⟌ 125° 30' 25"
13. 12 ⟌ 40° 20' 16"
14. 14 ⟌ 185° 34' 12"

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

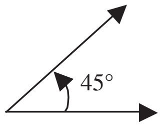
Clasificación de acuerdo con su medida

La magnitud de un ángulo depende de su abertura comprendida entre los lados y no de la longitud de éstos. De acuerdo con su magnitud, se clasifican en:

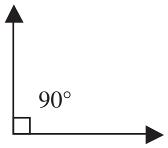
Convexos

Son los que miden más de 0° y menos de 180°, a su vez se clasifican en:

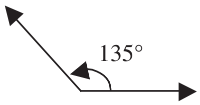
Agudo. Es aquel que mide más de 0° y menos de 90°.



Recto. Es aquel cuya magnitud es de 90°.

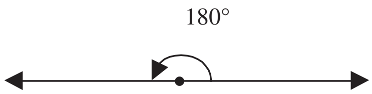


Obtuso. Es aquel que mide más de 90° y menos de 180°.



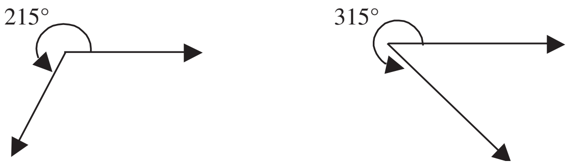
Llano o de lados colineales

Es el que mide 180°.



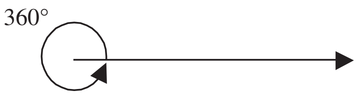
Cóncavo o entrante

Es aquel que mide más de 180° y menos de 360°.



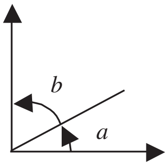
Perigonal o de vuelta entera

Es el que mide 360°.



Complementarios

Son aquellos cuya suma es igual a un ángulo recto (90°).

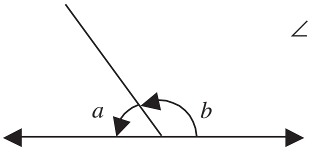


$\angle a + \angle b = 90°$

Suplementarios

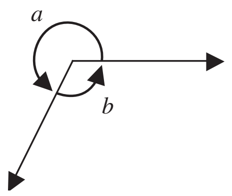
Son aquellos cuya suma es igual a dos ángulos rectos (180°).

$\angle a + \angle b = 180°$



Conjugados

Son los ángulos cuya suma es igual a cuatro ángulos rectos (360°).



$\angle a + \angle b = 360°$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el complemento del ángulo de 38° 40'.

Solución

Por definición, 2 ángulos son complementarios si suman 90°, entonces:

$$38° 40' + x = 90° \qquad \text{pero} \qquad 90° = 89° 60'$$
$$x = 89° 60' - 38° 40'$$
$$x = 51° 20'$$

Por consiguiente, el complemento de 38° 40' es 51° 20'.

2 Determina el ángulo que es el triple de su complemento.

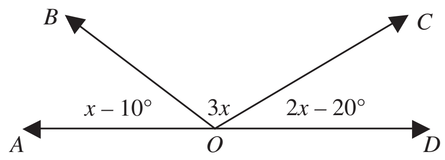
Solución

Sea x el complemento, entonces $3x$ es el ángulo, al aplicar la definición de ángulos complementarios:

$$\text{Ángulo} + \text{Complemento} = 90° \quad ; \quad 3x + x = 90°$$
$$4x = 90°$$
$$x = \frac{90°}{4}$$
$$x = 22.5°$$

Por tanto, el ángulo es de 67.5° = 67° 30'.

3 Encuentra el valor de los ángulos que se muestran en la siguiente figura:



Solución

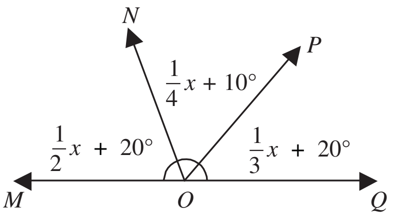
Los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$ son suplementarios, entonces:

$$\angle AOB = x - 10° \qquad (x - 10°) + 3x + (2x - 20°) = 180°$$
$$\angle BOC = 3x \qquad 6x - 30° = 180°$$
$$\angle COD = 2x - 20° \qquad 6x = 210°$$
$$x = 35°$$

Entonces:

$$\angle AOB = x - 10° = 35° - 10° = 25°$$
$$\angle BOC = 3x = 3(35°) = 105°$$
$$\angle COD = 2x - 20° = 2(35°) - 20° = 70° - 20° = 50°$$

4 Determina el valor de los ángulos de la siguiente figura:



Solución

En la figura,

$$\angle MON = \frac{1}{2}x + 20°,\ \angle NOP = \frac{1}{4}x + 10° \ \text{ y } \ \angle POQ = \frac{1}{3}x + 20°$$

Los ángulos $\angle MON$, $\angle NOP$ y $\angle POQ$ forman un ángulo llano, entonces:

$$\frac{1}{2}x + 20° + \frac{1}{4}x + 10° + \frac{1}{3}x + 20° = 180°$$

Donde $x = 120°$, por consiguiente,

$$\angle MON = 80°,\ \angle NOP = 40° \ \text{ y } \ \angle POQ = 60°$$

EJERCICIO 5

Indica si los pares de ángulos siguientes son complementarios, suplementarios o conjugados:

1. 37° y 143°
2. 42° y 48°
3. 135° y 225°
4. 21° y 339°
5. 132° y 228°
6. 34° 48’ y 55° 12’
7. 22° y 158°
8. 10° y 80°
9. 270° y 90°
10. 179° y 1°

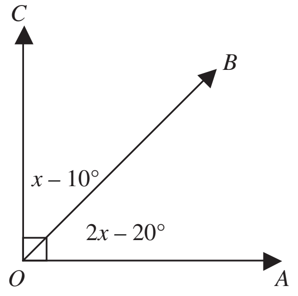
Efectúa lo siguiente:

11. Determina el complemento de 80°.
12. Encuentra el suplemento de 123°.
13. Encuentra el conjugado de 280°.
14. Si el complemento de un ángulo m es $2m$, ¿cuál es el valor del ángulo?
15. ¿Cuál es el ángulo cuyo complemento es 4 veces mayor que él?
16. Si el suplemento de un ángulo es 8 veces el ángulo, ¿cuánto vale éste?
17. Un ángulo y su complemento están en la razón 2:3. ¿Cuál es la medida del ángulo?

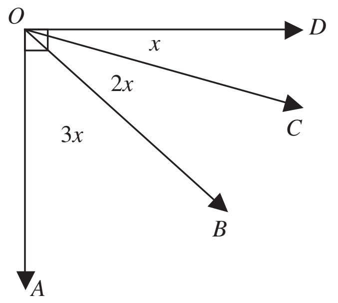
18. ¿Qué ángulo es igual al doble de su suplemento?

19. Determina el valor de los ángulos que se muestran en las siguientes figuras:

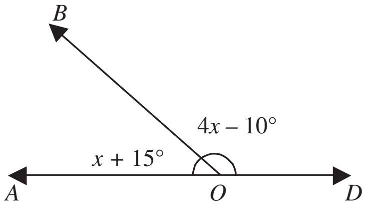
a)



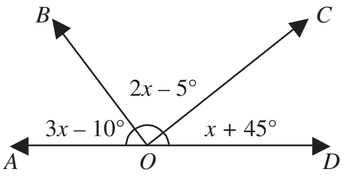
b)



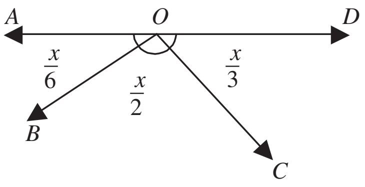
c)



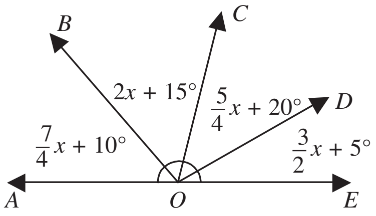
d)



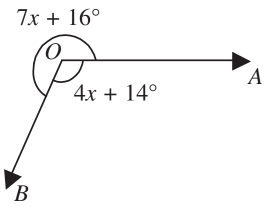
e)



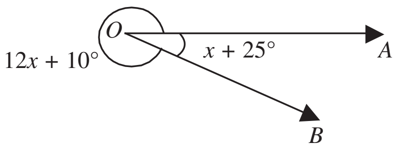
f)



g)



h)



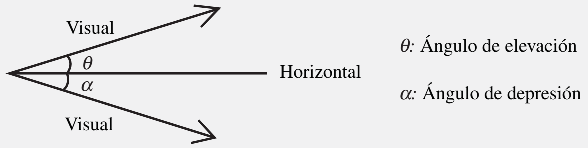
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los ángulos se encuentran en todo aquello que tenga intersecciones de líneas, bordes, planos, etcétera. La esquina de una cuadra, el cruce de los cables de luz, al abrir un libro, la esquina de un cuarto, la abertura formada por las manecillas de un reloj, la unión de una viga y una columna, son algunos ejemplos de ángulos, éstos tienen aplicación en la aviación, la navegación, la topografía y la trigonometría, entre otros.

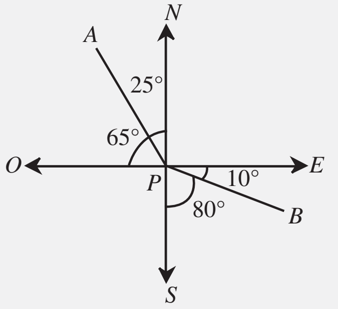
Ángulo vertical

Sirve para definir el grado de inclinación del alineamiento sobre un terreno. Si se toma como referencia la línea horizontal, al ángulo vertical se le conoce como pendiente de una línea, el cual es positivo (de elevación) o negativo (de depresión).



Ángulo horizontal

Lo forman 2 líneas rectas situadas en un plano horizontal. El valor del ángulo horizontal se utiliza para definir la dirección de un alineamiento a partir de una línea que se toma como referencia, y por lo regular son los puntos cardinales: norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O).



En la figura se muestran las direcciones de los puntos A y B respecto al punto P.

Dirección de A respecto a P

$N25°O$ o $O65°N$

Dirección de B respecto a P

$E10°S$ o $S80°E$

1 Un barco sale de un puerto con dirección $O40°50'N$, mientras que una segunda embarcación sale del mismo muelle con dirección $E24°30'N$. ¿Qué ángulo forman las direcciones de ambos buques?

Solución

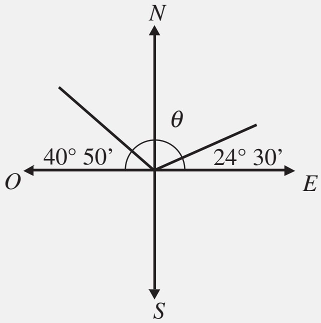
Al establecer las direcciones de los dos barcos, se observa que el ángulo θ que forman es:

$$\theta = 180° - (40°\ 50' + 24°\ 30')$$

$$\theta = 180° - 65°\ 20'$$

$$\theta = 114°\ 40'$$

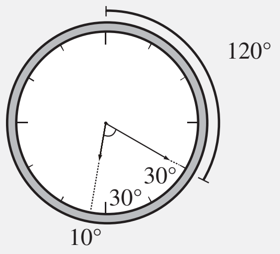
Por tanto el ángulo que forman mide 114° 40'.



2 ¿Cuál es el ángulo agudo formado por el horario y el minutero si el reloj marca las 18:20 hr?

Solución

En un reloj de manecillas cuando el minutero recorre una vuelta (360°), el horario sólo avanza 30°, esto significa que el horario avanza la doceava parte de lo que recorre el minutero por vuelta, a partir de las 12:00 hr, luego, a las 18:20 hr, el minutero avanzó 120° y está ubicado en el número 4 mientras que el horario avanzó $\frac{1}{12}(120°) = 10°$ y está entre las 6 y las 7 horas, por tanto, el ángulo agudo es de 70°.



EJERCICIO 6

Resuelve los siguientes problemas:

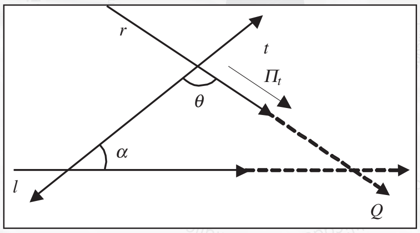
1. Un barco sale de un puerto con dirección norte y una segunda embarcación sale del mismo muelle con dirección sureste. Determina el ángulo que forman las direcciones de los dos buques.
2. Dos aviones parten de una ciudad con direcciones $S32°E$ y $E\,57°N$, ¿cuál es el ángulo que forman sus direcciones?
3. El ángulo que forman las direcciones de 2 personas es 125°. Determina los ángulos θ y α si la primera persona tiene dirección $O\theta N$, la segunda $E\alpha N$ y θ equivale a los cinco sextos de α.
4. Desde un punto P se observan dos edificios, el primero de ellos tiene una dirección $N8°\,39'O$. Si el ángulo que forman las direcciones de estos edificios es de 144° 39', determina la dirección del segundo edificio si se encuentra en el plano oeste-sur.
5. ¿Cuál es el ángulo agudo formado por las manecillas del reloj cuando marcan las 14:15 hr?
6. Determina el número de grados en el ángulo formado por las manecillas del reloj a las 10:10 hr.
7. Encuentra el número de grados en el ángulo mayor formado por las manecillas del reloj a las $5\frac{1}{4}$.
8. ¿A qué hora entre las 12:00 y las 13:00, las manecillas del reloj formarán un ángulo de 165°?
9. ¿Cuántos radianes girará el minutero de un reloj en un día completo?
10. ¿A qué hora entre las 3 y las 4, las manecillas del reloj forman un ángulo de 130°?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Rectas perpendiculares y paralelas

Reseña HISTÓRICA



AXIOMA DE PARALELISMO
V POSTULADO DE EUCLIDES (V.P.E.)

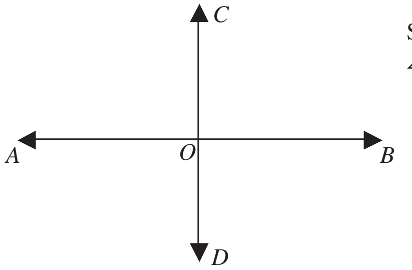
Si 2 rectas distintas *l* y *r*, coplanares cortadas por una secante *t* en puntos distintos, forman con ella en el semiplano Π_t 2 ángulos interiores, de tal manera que la suma de sus medidas sea menor que 180º, entonces las 2 rectas se cortan en algún punto del semiplano Π_t.

El quinto postulado de Euclides (V.P.E.) tiene un enunciado equivalente, llamado el postulado de la paralela única de Playfair, el cual dice: "por un punto exterior a una recta pasa una paralela a la recta y sólo una".

El quinto postulado (axioma de paralelismo de Euclides) causó un trastorno considerable desde la época de los griegos. Muchos geómetras pensaron que tal vez podría deducirse como teorema a partir de los restantes axiomas o postulados. Euclides mismo trató de evitarlo mientras pudo, pues no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición 120. Durante más de 2 000 años fueron ofrecidas diferentes "demostraciones" del postulado, pero cada una se basaba en una suposición equivalente al mismo. La independencia del postulado de las paralelas quedó establecida cuando fue demostrada la compatibilidad de los otros geómetras donde el V Postulado se negaba o cambiaba por otro. Cualquier geometría cuyos axiomas contradicen alguno de los de Euclides, es llamada no euclidiana. La primera de ellas que se inventó fue la geometría Lobachevsquiana. Gauss (1777-1855) en Alemania, Bolyai (1802-1860) en Hungría y Lobachevsky (1793-1856) en Rusia, plantearon independientemente la forma de Playfair (1748-1819) del postulado, considerando 3 posibilidades: por un punto exterior a una recta pueden trazarse más de una, únicamente una o ninguna paralela a la recta.

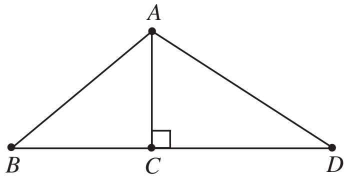
Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si, al cortarse, forman 4 ángulos rectos. Para denotar que una recta es perpendicular a otra se utiliza el símbolo $\perp$.



Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, entonces
$\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = \angle DOA = 90º$

➲ **Teorema 1.** Si por un punto exterior a una recta se traza una perpendicular y varias oblicuas, se verifica:



a) El segmento perpendicular comprendido entre el punto y la recta es menor que cualquier segmento de las oblicuas.

$$\text{Si } \overline{AC} \perp \overline{BD}, \text{ entonces } \overline{AC} < \overline{AB} \text{ y } \overline{AC} < \overline{AD}$$

b) De 2 segmentos de oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel que dista más.

$$\text{Si } \overline{BC} < \overline{CD}, \text{ entonces } \overline{AB} < \overline{AD}$$

c) Los segmentos de oblicuas cuyos pies equidistan al pie de la perpendicular, son iguales.

$$\text{Si } \overline{BC} = \overline{CD}, \text{ entonces } \overline{AB} = \overline{AD}$$

➲ **Teorema 2.** Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera.

Paralelismo

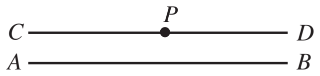
Dos rectas son paralelas si no tienen un punto en común y guardan siempre una misma distancia.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

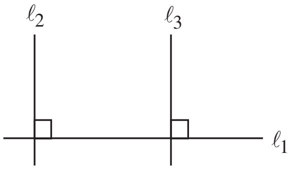
➲ **Teorema 1.** Dos rectas en el plano, paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$

➲ **Teorema 2.** Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a ella.



➲ **Teorema 3.** Si una recta ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2, también es perpendicular a toda paralela a la recta ℓ_2.

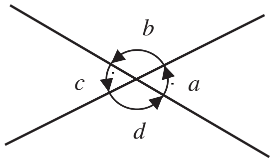


Si $\ell_1 \perp \ell_2$ y $\ell_2 \parallel \ell_3$

Entonces:

$$\ell_1 \perp \ell_3$$

Ángulos opuestos por el vértice

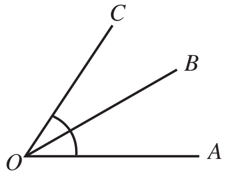


Son aquellos que tienen el vértice común, y los lados de uno de los ángulos son la prolongación de los del otro.

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

$$\angle a = \angle c \quad \text{y} \quad \angle b = \angle d$$

Ángulos contiguos

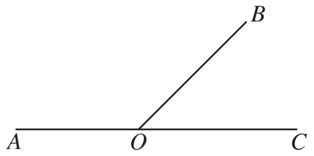


Son aquellos que tienen un lado y un vértice en común.

$\angle AOB$ es contiguo a $\angle BOC$, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$

Ángulos adyacentes



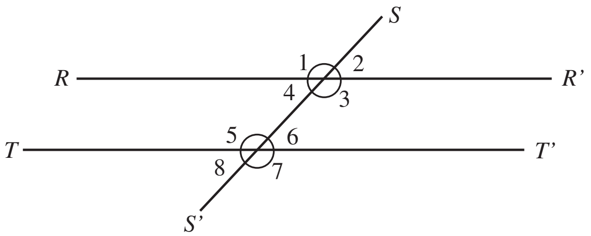
Son ángulos contiguos cuyos ángulos no comunes están alineados, esto es, suman 180º.

$\angle AOB$ es adyacente a $\angle BOC$, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOC = 180º$$

Rectas paralelas cortadas por una recta secante

Dadas las rectas, $\overline{RR'} \parallel \overline{TT'}$ y $\overline{SS'}$ una recta secante, se forman los siguientes ángulos:



Estos ángulos reciben los siguientes nombres:

Ángulos alternos internos. Ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante; son iguales.

$$\angle 3 = \angle 5; \quad \angle 4 = \angle 6$$

Ángulos alternos externos. Ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la secante; son iguales.

$$\angle 1 = \angle 7; \quad \angle 2 = \angle 8$$

Ángulos correspondientes. Dos ángulos no adyacentes situados en un mismo lado de la secante; son iguales.

$$\angle 1 = \angle 5; \quad \angle 4 = \angle 8; \quad \angle 2 = \angle 6; \quad \angle 3 = \angle 7$$

Ángulos colaterales internos (suplementarios). Dos ángulos internos no adyacentes y situados del mismo lado de la secante; suman 180°.

$$\angle 4 + \angle 5 = 180°; \quad \angle 3 + \angle 6 = 180°$$

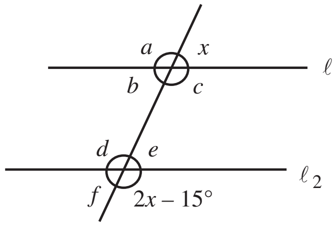
Ángulos colaterales externos (suplementarios). Ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante; suman 180°.

$$\angle 1 + \angle 8 = 180°; \quad \angle 2 + \angle 7 = 180°$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, calcula el valor de los ángulos a, b, c, d, e, f, x, y $2x - 15°$, de la siguiente figura:



Solución

Los ángulos x y $2x - 15°$ son colaterales externos, entonces:

$$x + (2x - 15°) = 180° \quad \rightarrow \quad 3x - 15° = 180°$$
$$3x = 180° + 15°$$
$$3x = 195°$$
$$x = \frac{195°}{3}$$
$$x = 65°$$

Los ángulos a y x son ángulos suplementarios:

$$a + x = 180° \quad \rightarrow \quad a = 180° - x$$
$$a = 180° - 65°$$
$$a = 115°$$

Para obtener los valores de los ángulos restantes, únicamente se toma la posición de cada par de ángulos:

$\angle d = \angle a$ por ser correspondientes, entonces $\angle d = 115°$

$\angle c = \angle a$ por ser opuestos por el vértice, en consecuencia $\angle c = 115°$

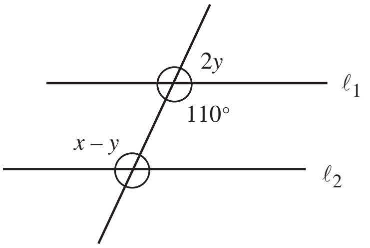
$\angle e = \angle x$ por ser correspondientes, se determina que $\angle e = 65°$

$\angle f = \angle e$ por ser opuestos por el vértice, por tanto $\angle f = 65°$

Luego, los valores de los ángulos son:

$\angle a = 115°$	$\angle x = 65°$
$\angle d = 115°$	$\angle b = 65°$
$\angle c = 115°$	$\angle e = 65°$
$\angle 2x - 15° = 115°$	$\angle f = 65°$

2 Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, obtén los valores de x y de y en la siguiente figura:



Solución

Los ángulos 110° y $2y$ son suplementarios:

$$2y + 110° = 180° \quad \text{donde} \quad y = \frac{180° - 110°}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

Los ángulos $x - y$ y 110° son alternos internos, entonces,

$$x - y = 110° \quad \text{donde} \quad x - 35° = 110°$$
$$x = 110° + 35°$$
$$x = 145°$$

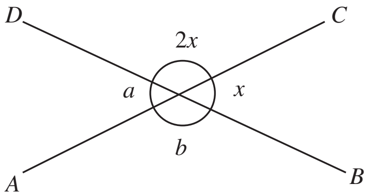
Finalmente, las soluciones son:

$$x = 145°; \quad y = 35°$$

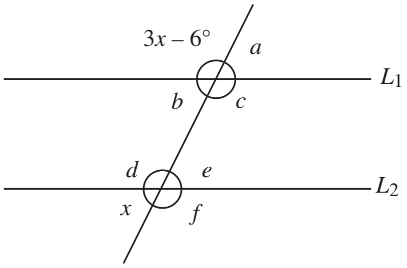
EJERCICIO 7

Calcula el valor de cada uno de los ángulos que se indican en las figuras siguientes:

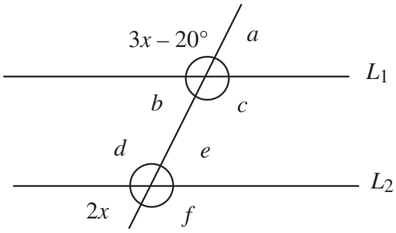
1.



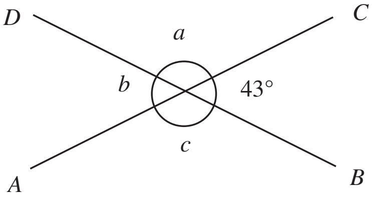
2. Si $L_1 \parallel L_2$



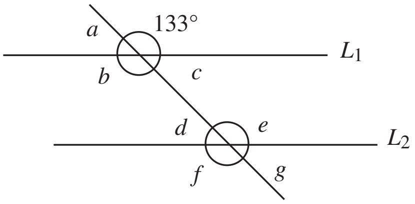
3. Si $L_1 \parallel L_2$



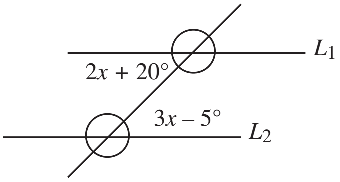
4.



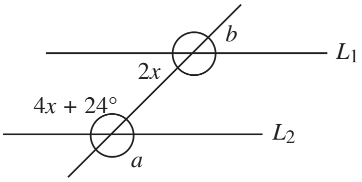
5. Si $L_1 \parallel L_2$, encuentra el valor de los ángulos



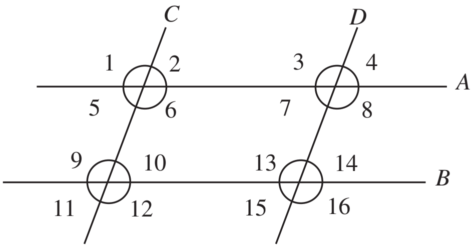
6. Si $L_1 \parallel L_2$, halla el valor de x



7. Si $L_1 \parallel L_2$, determina el valor de x, a y b

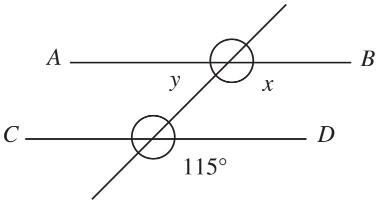


8. En la siguiente figura: $A \parallel B$, $C \parallel D$ y el $\angle 3 = 110°$. Determina la medida de los ángulos $\angle 4$, $\angle 7$, $\angle 1$, $\angle 10$, $\angle 13$ y $\angle 16$

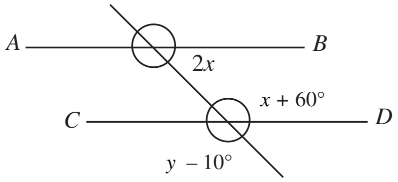


En los ejercicios del 9 al 11 determina el valor de x y y

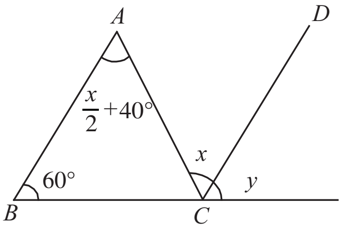
9. *Si* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



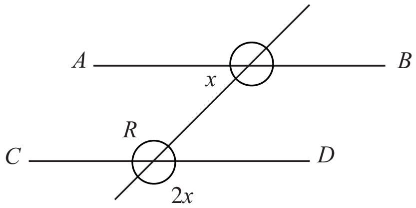
10. *Si* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



11. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

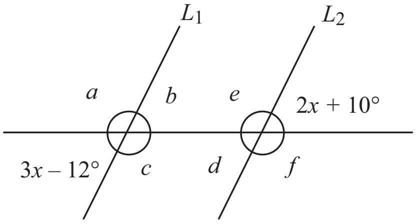


12. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentra la medida del ángulo R

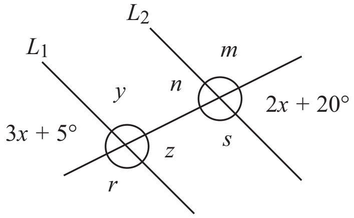


En las siguientes figuras encuentra la medida de los ángulos que se forman:

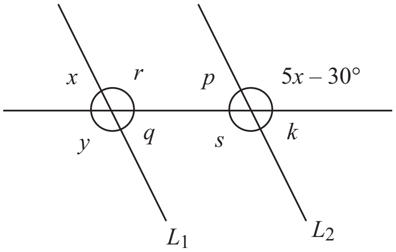
13. Si $L_1 \parallel L_2$



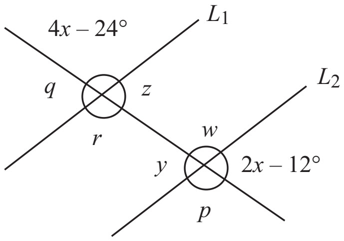
14. Si $L_1 \parallel L_2$



15. Si $L_1 \parallel L_2$

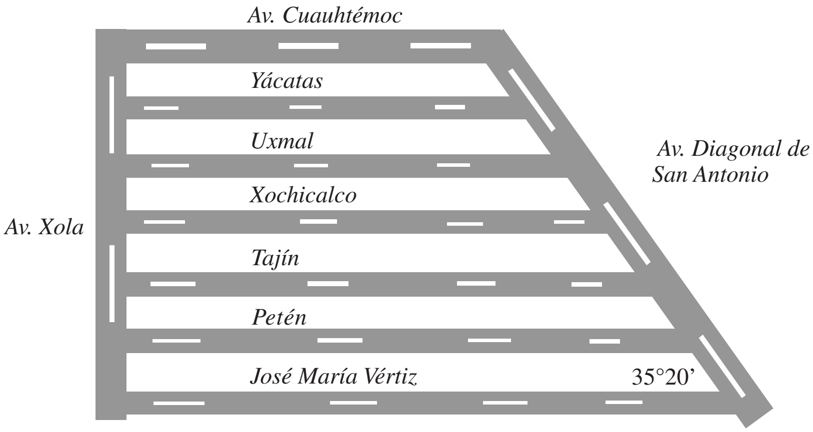


16. Si $L_1 \parallel L_2$



Resuelve los siguientes ejercicios:

17. Con base en el croquis que se muestra, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) La calle de Uxmal es paralela a la de Tajín

b) La avenida Xola es perpendicular a la calle de Xochicalco

c) La avenida Diagonal de San Antonio es paralela a la avenida Xola

d) El ángulo que forman la calle Petén y la avenida Diagonal de San Antonio es de 35° 20’

e) Las avenidas Xola y José María Vértiz son paralelas

f) Las avenidas Cuauhtémoc y José María Vértiz son paralelas

g) Las avenidas Diagonal de San Antonio y José María Vértiz son perpendiculares

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Reseña HISTÓRICA

Imagen de Pitágoras obtenida del *Diccionario de Autores*, perteneciente a la obra *Illustrium Imagines* de Fulvio Orsini, publicada en 1570.

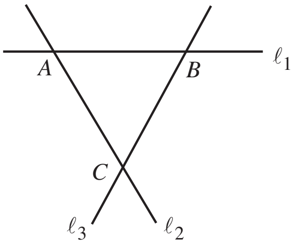
Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón. Nacido en la isla de Samos, Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios: Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que Pitágoras fue condenado a exiliarse de Samos por su aversión a la tiranía de Polícrates. Hacia el 530 a.C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo.

Teoría de los números

Entre las amplias investigaciones matemáticas realizadas por los pitagóricos se encuentran sus estudios de los números pares e impares, y de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde el punto de vista aritmético cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. A partir de estos estudios establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros 2 lados.

Definición

Porción del plano limitada por 3 rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices.



A, B y C: vértices

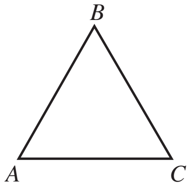
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$: lados

Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican por la longitud de sus lados o la magnitud de sus ángulos.

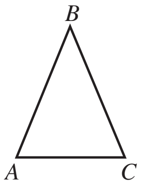
Por sus lados

Triángulo equilátero
Sus lados son iguales



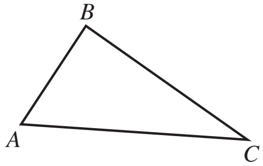
$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

Triángulo isósceles
Tiene 2 lados iguales



$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$

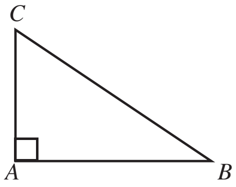
Triángulo escaleno
Sus lados son diferentes



$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

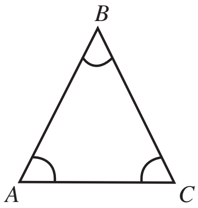
Por sus ángulos

Triángulo rectángulo
Tiene un ángulo recto



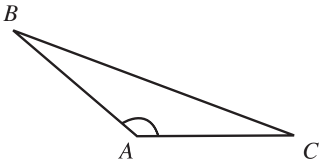
$\angle A = 90°$

Triángulo acutángulo
Sus 3 ángulos son agudos



$\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ y $\angle C < 90°$

Triángulo obtusángulo
Es el que tiene un ángulo obtuso



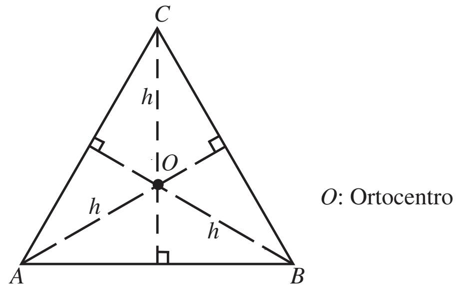
$\angle A > 90°$

Rectas y puntos notables

Son rectas y puntos con características especiales dentro de un triángulo y son:

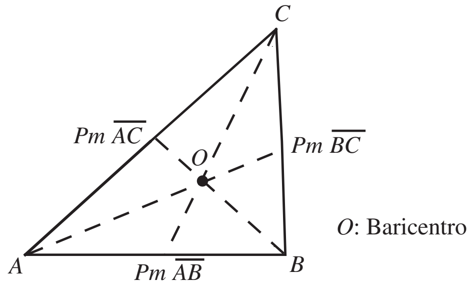
Altura. Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto.

Ortocentro. Se define así al punto donde se intersecan las alturas.



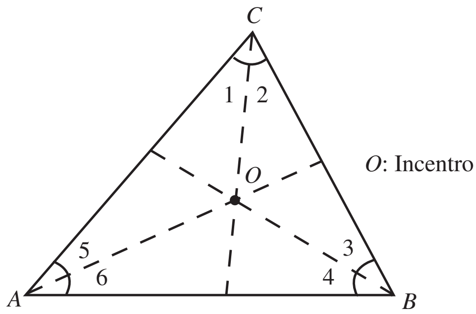
Mediana. Así se denomina al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Baricentro. Es el punto donde se intersecan las medianas.



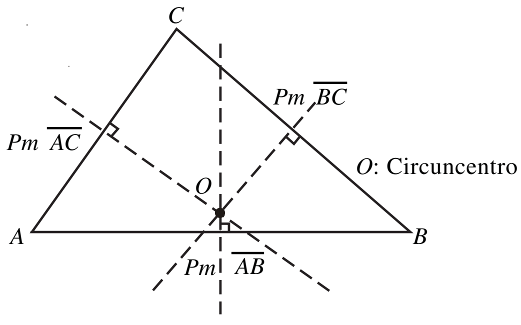
Bisectriz. Recta que divide en 2 ángulos iguales a un ángulo interior de un triángulo.

Incentro. Es el punto donde se intersecan las bisectrices.



Mediatriz. Recta perpendicular al lado de un triángulo y que pasa por el punto medio de este mismo lado.

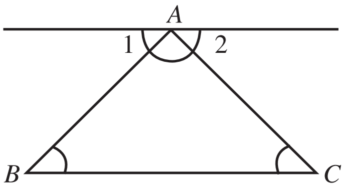
Circuncentro. Es el punto donde se intersecan las mediatrices.



Teoremas

A continuación se mencionan y demuestran algunos teoremas importantes sobre triángulos.

➡ **Teorema 1.** La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Demostración: Por ángulos suplementarios,

$$\angle 1 + \angle A + \angle 2 = 180°$$

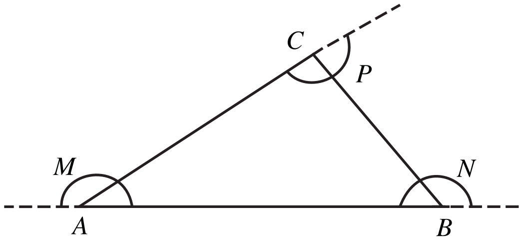
La recta que pasa por el vértice A es paralela a BC y por ángulos alternos internos entre paralelas:

$$\angle 1 = \angle B; \angle 2 = \angle C$$

Al sustituir en $\angle 1 + \angle A + \angle 2 = 180°$, se obtiene:

$$\angle B + \angle A + \angle C = 180°$$

➡ **Teorema 2.** Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los 2 interiores no adyacentes a él.



$$\angle M = \angle B + \angle C$$
$$\angle P = \angle A + \angle B$$
$$\angle N = \angle A + \angle C$$

Demostración: En un triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°.

$$\angle B + \angle A + \angle C = 180°$$

Los ángulos A y M son suplementarios:

$$\angle A + \angle M = 180º$$

Al igualar:

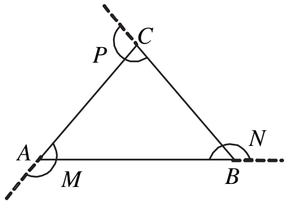
$$\angle B + \angle A + \angle C = \angle A + \angle M$$

$$\angle B + \angle C = \angle A - \angle A + \angle M$$

$$\angle B + \angle C = \angle M$$

Para $\angle N$ y $\angle P$ se realiza el mismo procedimiento.

➡ **Teorema 3.** La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360º.



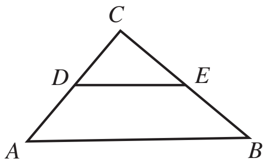
$\angle M + \angle N + \angle P = 360°$

Demostración: Los ángulos *M*, *P* y *N* son ángulos exteriores, entonces al aplicar el teorema 2.

$$
\begin{array}{rl}
 & \angle M = \angle B + \angle C \\
+ & \angle P = \angle A + \angle B \\
 & \angle N = \angle A + \angle C \\
\hline
 & \angle M + \angle N + \angle P = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C \\
 & \angle M + \angle N + \angle P = 2(\angle A + \angle B + \angle C) \\
 & \angle M + \angle N + \angle P = 2(180°) = 360°
\end{array}
$$

Por tanto, $\angle M + \angle N + \angle P = 360°$

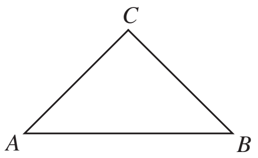
➡ **Teorema 4.** En todo triángulo la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados es paralela e igual a un medio de la longitud del lado restante.



$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y

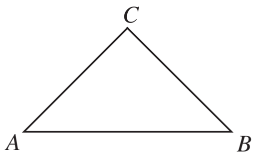
$\overline{DE} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$

➡ **Teorema 5.** La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el lado restante, mientras que su diferencia es menor.



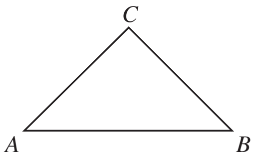
$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$

➡ **Teorema 6.** Si 2 lados de un triángulo son distintos, al mayor lado se opone mayor ángulo.



Si $\overline{BC} > \overline{AC}$
entonces
$\angle A > \angle B$

➡ **Teorema 7.** Para 2 ángulos distintos de un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

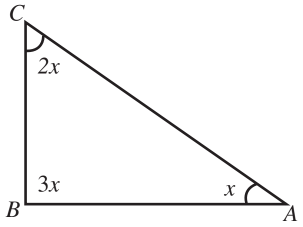


Si $\angle A > \angle B$
entonces
$\overline{BC} > \overline{AC}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de los ángulos del siguiente triángulo:



Solución

Por definición, los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

$$x + 2x + 3x = 180° \qquad \text{donde} \qquad 6x = 180°$$

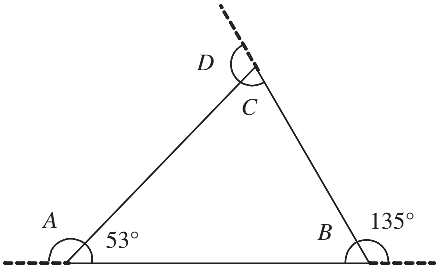
$$x = \frac{180°}{6} = 30°$$

Si $x = 30°$, entonces:

$$\angle A = x = 30°, \angle C = 2x = 2(30°) = 60° \text{ y } \angle B = 3x = 3(30°) = 90°$$

Por consiguiente: $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$ y $\angle B = 90°$

2 Calcula el valor de los ángulos del siguiente triángulo:



Solución

Por ángulos exteriores:

$$\angle C + 53° = 135° \qquad \text{donde} \qquad \angle C = 135° - 53° = 82°$$

Por ángulos suplementarios,

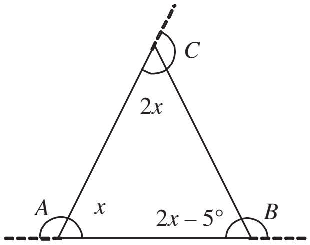
$$\angle B + 135° = 180° \quad \rightarrow \quad \angle B = 180° - 135° = 45°$$

$$\angle A + 53° = 180° \quad \rightarrow \quad \angle A = 180° - 53° = 127°$$

$$\angle C + \angle D = 180° \quad \rightarrow \quad \angle D = 180° - \angle C = 180° - 82° = 98°$$

Por tanto, $\angle A = 127°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 82°$ y $\angle D = 98°$

3 Determina el valor de los ángulos del siguiente triángulo:



Solución

La suma de los ángulos interiores es 180°

$$2x + x + (2x - 5°) = 180° \qquad 5x - 5° = 180°$$

$$x = \frac{185°}{5} = 37°$$

Por ser ángulos suplementarios:

$$\angle A + x = 180° \quad \rightarrow \quad \angle A = 180° - x = 180° - 37° = 143°$$

$$\angle B + 2x - 5° = 180° \quad \rightarrow \quad \angle B = 180° - 2x + 5° = 180° - 74° + 5° = 111°$$

$$\angle C + 2x = 180° \quad \rightarrow \quad \angle C = 180° - 2x = 180° - 74° = 106°$$

Por consiguiente:

$$\angle A = 143° \qquad \angle B = 111° \qquad \angle C = 106°$$

$$\angle x = 37° \qquad \angle 2x - 5° = 69° \qquad \angle 2x = 74°$$

4 La medida de los ángulos interiores de un triángulo es equivalente a 3 números pares consecutivos, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

Solución

Sean los ángulos $2x$, $2x + 2°$, $2x + 4°$, si aplicas el teorema 1 de los triángulos:

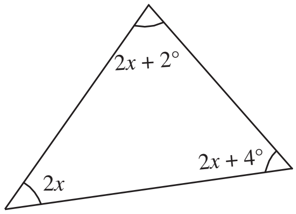
$$2x + 2x + 2° + 2x + 4° = 180°$$

$$6x + 6° = 180°$$

$$6x = 174°$$

$$x = 29°$$

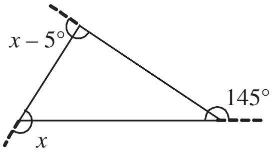
Por tanto, el valor de cada uno de los ángulos es:
58°, 60° y 62°



EJERCICIO 8

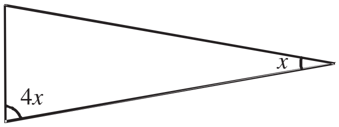
Resuelve los siguientes problemas:

1. Calcula el valor de los ángulos exteriores del siguiente triángulo:

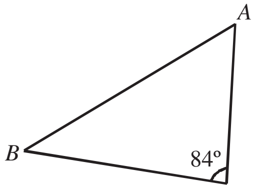


2. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 8 veces el otro. ¿Cuánto vale cada ángulo?

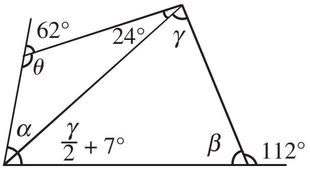
3. En un triángulo isósceles, un ángulo de la base es el cuádruplo del ángulo diferente. ¿Cuánto mide cada ángulo?



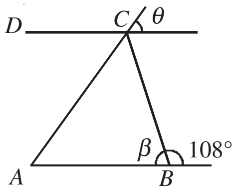
4. Uno de los ángulos interiores de un triángulo mide 84° y la diferencia de los otros 2 es de 14°. ¿Cuánto miden los ángulos restantes?



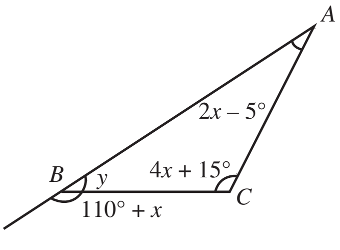
5. Encuentra los ángulos interiores de los siguientes triángulos:



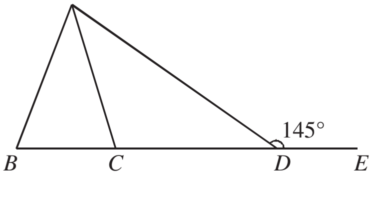
6. Determina los valores de β y θ. Si $\overline{AC}$ biseca al ángulo *DCB* y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$



7. Determina el valor de los ángulos interiores del triángulo *ABC*.



8. En la siguiente figura el lado $\overline{AC}$ es bisectriz del ángulo $\angle BAD$. Determina los ángulos interiores de los ΔABC y ACD sabiendo que $\angle BAC = y + 8°$, $\angle CAD = x + 13°$, $\angle ABC = 3x - 6°$ y $\angle ACD = \frac{10}{3}y + 7°$



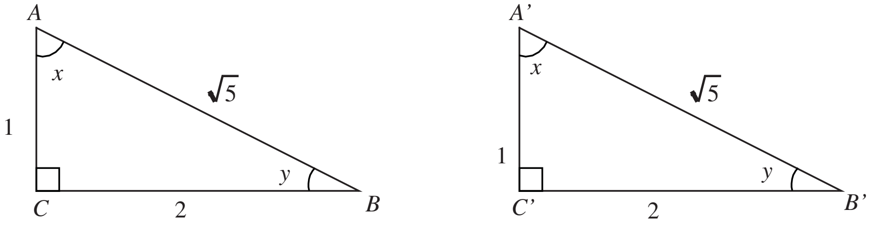
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Triángulos congruentes

Son aquellos que tienen la misma forma y tamaño.

Si 2 triángulos son congruentes entonces:

a) Sus lados homólogos son iguales.
b) Sus ángulos homólogos son iguales.

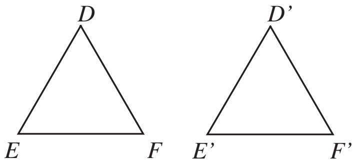


Los triángulos *ABC* y *A’B’C’* son congruentes, porque tienen iguales tanto sus lados como sus ángulos, es decir, existe igualdad entre los 3 pares de lados y los 3 pares de ángulos.

Esto se representa $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$ y se lee: “El triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *A’B’C’* ”.

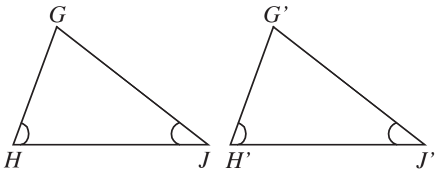
Teoremas de congruencia

➡ **Teorema I (lado, lado, lado).** Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados iguales.



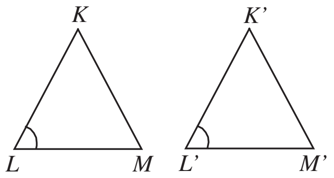
$$\overline{DE} = \overline{D'E'},\ \overline{EF} = \overline{E'F'} \text{ y } \overline{DF} = \overline{D'F'}$$

➡ **Teorema II (ángulo, lado, ángulo).** Dos triángulos son congruentes si tienen 2 ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente iguales.



$$\angle H = \angle H',\ \overline{HJ} = \overline{H'J'} \text{ y } \angle J = \angle J'$$

➡ **Teorema III (lado, ángulo, lado).** Dos triángulos son congruentes si 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a sus homólogos del otro.

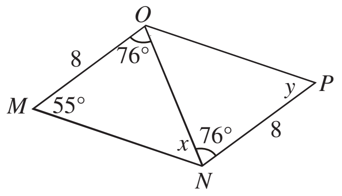


$$\overline{KL} = \overline{K'L'},\ \angle L = \angle L' \text{ y } \overline{LM} = \overline{L'M'}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la siguiente figura $\overline{MO} \parallel \overline{PN}$. Determina si los siguientes triángulos son congruentes y encuentra los valores de x y y.



Solución

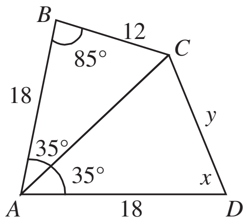
Se construye una tabla en la que se dan las afirmaciones y las razones que nos lleven a la demostración que se pide.

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{MO} = \overline{PN}$	1. Datos
2. $\angle MON = \angle PNO$	2. Datos
3. $\overline{ON} = \overline{NO}$	3. Por ser lado común a los triángulos *MON* y *PNO*
4. $\Delta MON \cong \Delta PNO$	4. Por el teorema: lado, ángulo, lado
5. $y = 55°$	5. Los ángulos homólogos de triángulos congruentes son iguales
6. $x = 49°$	6. En el triángulo *OMN*: $\angle MON + \angle ONM + \angle NMO = 180°$ $76° + x + 55° = 180°$ $x = 180° - 76° - 55° = 49°$

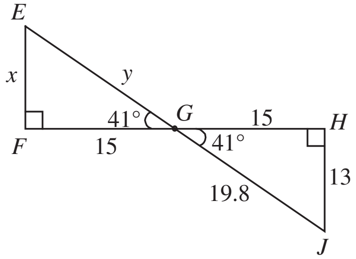
EJERCICIO 9

En cada uno de los siguientes casos indica por qué son congruentes los triángulos y determina los valores de x y y.

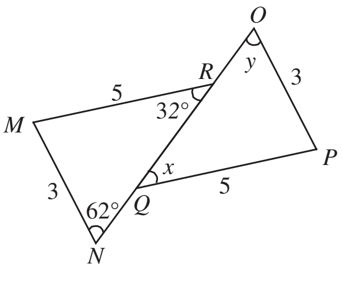
1.



2.



3. Si $\overline{NR} = \overline{QO}$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

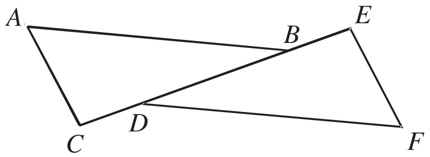
Aplicación de los teoremas de congruencia

Dados dos triángulos, establece los criterios por los que son congruentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$, $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{CB} \cong \overline{DE}$, demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta FDE$

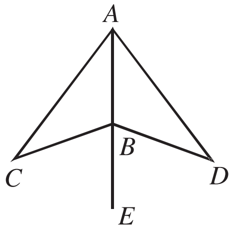


Solución

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $\angle C \cong \angle E$	1. Los lados *AC* y *EF* son paralelos y *CE* es la recta secante, por tanto, los ángulos *C* y *E* son alternos internos
2. $\overline{CB} \cong \overline{DE}$	2. Datos
3. $\angle B \cong \angle D$	3. Los lados *AB* y *DF* son paralelos y *CE* es la recta secante, en consecuencia, los ángulos *B* y *D* son alternos internos
4. $\Delta ABC \cong \Delta FDE$	4. Por el teorema: ángulo, lado, ángulo

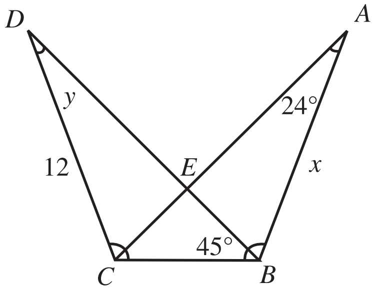
2 Si $\overline{AB}$ es bisectriz de $\angle CAD$ y $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Demuestra que $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz de $\angle CBD$.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC} \cong \overline{AD}$	1. Datos
2. $\angle CAB \cong \angle DAB$	2. Definición de bisectriz
3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$	3. Por ser lado común a los triángulos *CAB* y *DAB*
4. $\Delta CAB \cong \Delta DAB$	4. Por el teorema: lado, ángulo, lado
5. $\angle CBA \cong \angle DBA$	5. Los ángulos homólogos en triángulos congruentes son iguales
6. $\angle CBE \cong \angle DBE$	6. $\angle EBA = \angle ABE \rightarrow \angle CBA + \angle CBE = \angle DBA + \angle DBE$, pero $\angle CBA = \angle DBA$, entonces $\angle CBE = \angle DBE$
7. $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz del ángulo $\angle CBD$	7. Definición de bisectriz: $\angle CBE = \angle DBE$

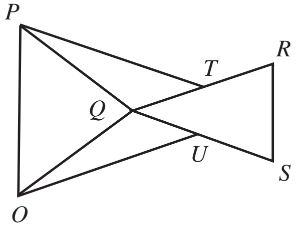
3 Si $\angle DCB = 111°$ y $\overline{DB} \perp \overline{AC}$, demuestra que los triángulos *DBC* y *ACB* son congruentes y determina los valores de *x* y *y*.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\angle CEB = 90°$	1. Datos
2. $\angle DBC = 45°$	2. Datos
3. $\angle DCB = 111°$	3. Datos
4. $\angle ECB = 45°$	4. En el triángulo *EBC*: $\angle CEB + \angle EBC + \angle ECB = 180°$, $90° + 45° + \angle ECB = 180°$ $\angle ECB = 180° - 135°$ $\angle ECB = 45°$
5. $\angle AEC = 180°$	5. Por ser ángulo llano
6. $\angle AEB = 90°$	6. $\angle AEC = \angle CEB + \angle AEB$ $180° = 90° + \angle AEB$ $90° = \angle AEB$
7. $\angle ABE = 66°$	7. En el triángulo *ABE*: $\angle AEB + \angle EAB + \angle ABE = 180°$ $90° + 24° + \angle ABE = 180°$ $\angle ABE = 180° - 114°$ $\angle ABE = 66°$
8. $\angle CBA = 111°$	8. $\angle CBA = \angle CBE + \angle ABE$ $\angle CBA = 45° + 66°$ $\angle CBA = 111°$
9. $\angle DBC \cong \angle ACB$	9. Por las afirmaciones 2 y 4, si $\angle ACB = \angle ECB$
10. $\overline{CB} \cong \overline{BC}$	10. Por ser lado común a los triángulos *DBC* y *ACB*
11. $\angle DCB \cong \angle ABC$	11. Por las afirmaciones 3 y 8, si $\angle ABC = \angle CBA$
12. $\Delta DBC \cong \Delta ACB$	12. Por el teorema: lado, ángulo, lado
13. $x = 12$, $y = 24°$	13. Los lados y ángulos homólogos de triángulos congruentes son iguales

4 En la figura, $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{QR}$, *U* es el punto medio de $\overline{QS}$, *T* es el punto medio de $\overline{QR}$, $\angle OQR \cong \angle PQS$. Demuestra que $\overline{OU} \cong \overline{PT}$.



Solución

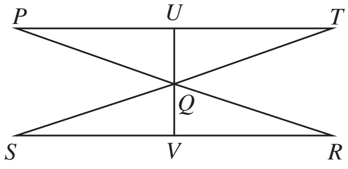
Para comprobar que $\overline{OU} \cong \overline{PT}$, es necesario demostrar que los triángulos *TQP* y *UQO* son congruentes, entonces:

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{QS} \cong \overline{QR}$	1. Datos
2. $\overline{QT} \cong \overline{QU}$	2. Los puntos *U* y *T* dividen en 2 segmentos iguales a los lados $\overline{QS}$ y $\overline{QR}$
3. $\angle OQR \cong \angle PQS$	3. Datos
4. $\angle OQR \cong \angle OQS + \angle SQR$	4. Ángulos contiguos
5. $\angle PQS \cong \angle PQR + \angle RQS$	5. Ángulos contiguos
6. $\angle OQS \cong \angle PQR$	6. De 3 se tiene que: $\angle OQR \cong \angle PQS$, entonces: $\angle OQS + \angle SQR \cong \angle PQR + \angle RQS$, pero $\angle SQR \cong \angle RQS$, por tanto: $\angle OQS \cong \angle PQR$
7. $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$	7. Datos
8. $\Delta\, TQP \cong \Delta\, UQO$	8. Por el teorema: lado, ángulo, lado
9. $\overline{OU} \cong \overline{PT}$	9. Los lados homólogos en triángulos congruentes son iguales

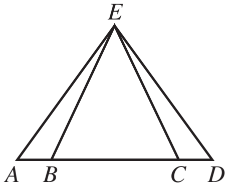
EJERCICIO **10**

Demuestra cada uno de los siguientes ejercicios:

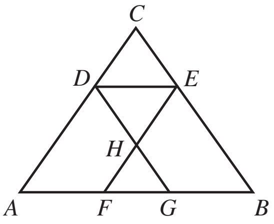
1. En la figura, los puntos *P, Q* y *R* son colineales, *S, Q* y *T* son colineales y *U, Q* y *V* son colineales. Si $\overline{SQ} \cong \overline{QT}$ y $\overline{UQ} \cong \overline{QV}$, demuestra que $\Delta\, PUQ \cong \Delta\, RVQ$



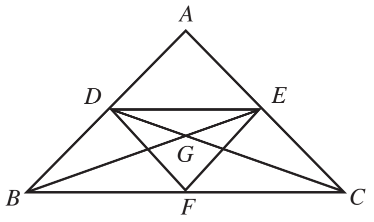
2. En la figura ΔAED, con $\overline{AE} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demuestra que $\angle\, CBE \cong \angle\, BCE$



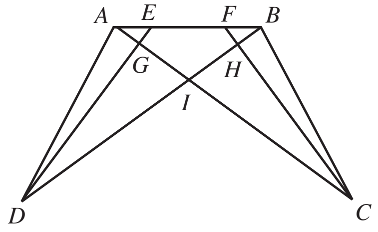
3. En la figura, $\angle\, CDH \cong \angle\, CEH$, $\overline{FH} \cong \overline{GH}$, $\overline{DH} \cong \overline{EH}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DC} \cong \overline{EC}$. Demuestra que $\Delta\, ADG \cong \Delta\, BEF$



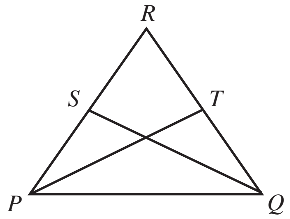
4. En la figura, $\angle ABC \cong \angle ACB$; $\overline{BF} \cong \overline{CF}$ y $\angle BFD \cong \angle CFE$. Demuestra que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$



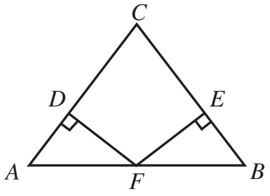
5. En la figura, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ y $\overline{AG} \cong \overline{BH}$. Demuestra que $\overline{EG} \cong \overline{FH}$



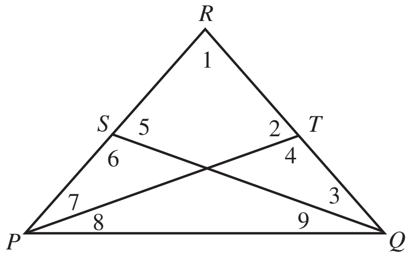
6. En la figura, $\overline{PS} \cong \overline{QT}$, $\overline{RS} \cong \overline{RT}$. Demuestra que $\overline{PT} \cong \overline{QS}$



7. En la figura se tiene el $\Delta\, ABC$ con $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{EF} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ y $\overline{DF} \cong \overline{EF}$. Demuestra que $\Delta\, ABC$ es isósceles.



8. De esta figura realiza lo que se indica.



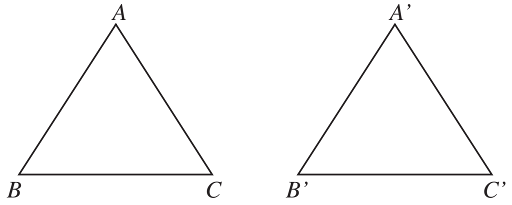
a) En el $\Delta\, PQR$, $\overline{PR} \cong \overline{QR}$ y $\angle 7 \cong \angle 3$, demuestra que $\overline{RS} \cong \overline{RT}$

b) En el $\Delta\, PQR$, $\angle RPQ \cong \angle RQP$ y $\angle 6 \cong \angle 4$, comprueba que $\overline{PS} \cong \overline{QT}$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro, por ser demostraciones.

Relación entre ángulos y lados homólogos de dos triángulos congruentes

Sean los triángulos congruentes *ABC* y *A'B'C'*:



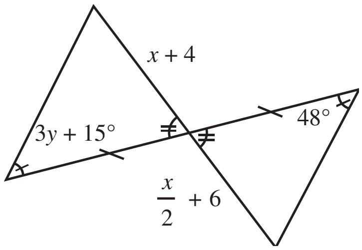
Entonces se verifica que sus lados y ángulos homólogos son iguales:

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',\ \overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'}\ \text{y}\ \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los valores de las incógnitas en los siguientes triángulos congruentes:



Solución

Dado que los triángulos son congruentes, sólo basta con igualar los ángulos y lados homólogos para determinar los valores tanto de x como de y, entonces:

$$3y + 15° \text{ es homólogo a } 48° \text{ y } ``x + 4" \text{ es homólogo a } ``\frac{x}{2} + 6"$$

Para y

$$3y + 15° = 48° \quad\rightarrow\quad 3y = 48° - 15° \quad\rightarrow\quad 3y = 33°$$

$$y = 11°$$

Para x

$$\frac{x}{2} + 6 = x + 4 \quad\rightarrow\quad 6 - 4 = x - \frac{x}{2} \quad\rightarrow\quad 2 = \frac{x}{2}$$

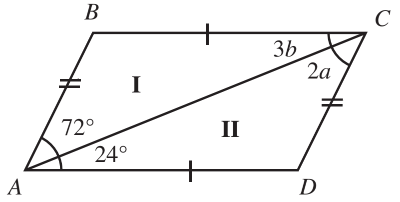
$$x = 4$$

En consecuencia, los valores de x y y son: 4 y 11°

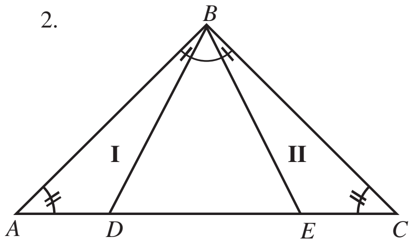
EJERCICIO 11

En las siguientes figuras los triángulos I y II son congruentes. Determina el valor de las incógnitas.

1.

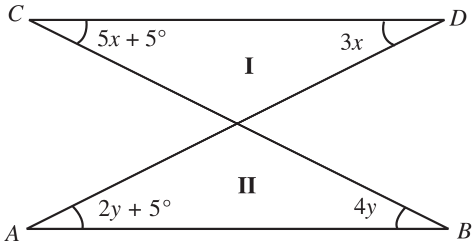


2.

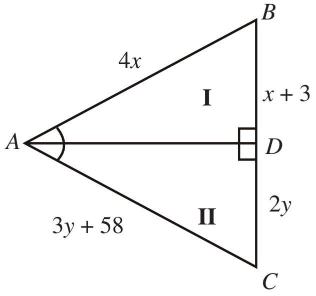


Si $\overline{AB} = 2y - 5$, $\overline{BC} = 5x + 10$
$\overline{AD} = x + 30$, $\overline{EC} = 3x$

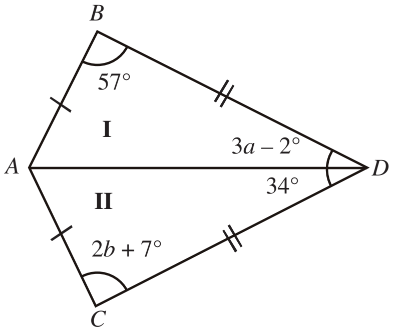
3.



4.



5.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Proporciones

La razón es la comparación de dos cantidades.

$$r = \frac{a}{b}$$

Una proporción es una igualdad de 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a : b = c : d$$

Y se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*.

Teoremas de proporciones

- **Teorema 1.** En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Si $a:b = c:d$, entonces $ad = bc$

- **Teorema 2.** En una proporción pueden intercambiarse el segundo y tercer términos, y se obtiene una proporción cierta.

Si $a:b = c:d$, entonces $a:c = b:d$

- **Teorema 3.** En una proporción pueden invertirse las razones.

Si $a:b = c:d$, entonces $b:a = d:c$

EJEMPLOS

1 Encuentra el valor de x en la proporción $\frac{x}{20}=\frac{3}{5}$

Solución

Se despeja la incógnita x,

$$\frac{x}{20}=\frac{3}{5} \qquad \text{donde} \qquad x=\frac{3\,(20)}{5}=\frac{60}{5}=12$$

Por consiguiente, $x = 12$

2 Determina el valor de x en la proporción $\frac{3}{x}=\frac{2}{5}$

Solución

Se despeja la incógnita:

$$\frac{3}{x}=\frac{2}{5} \qquad \text{donde} \qquad x=\frac{3(5)}{2}=\frac{15}{2}$$

Finalmente: $x=\frac{15}{2}$

3 Determina el valor de x en la proporción $x:2x-3=3:5$

Solución

Se establece en forma de cociente la proporción:

$$\frac{x}{2x-3}=\frac{3}{5}$$

Ahora de la igualdad se realiza un producto cruzado y se resuelve para x:

$$5x = 3(2x-3) \quad \rightarrow \quad 5x = 6x - 9$$
$$5x - 6x = -9$$
$$-x = -9$$
$$x = 9$$

De acuerdo con lo anterior, $x = 9$

4 Determina el valor de x en la siguiente proporción $\frac{32}{x}=\frac{x}{2}$

Solución

Se realiza un producto cruzado y se resuelve para x,

$$\frac{32}{x}=\frac{x}{2} \qquad \text{donde} \qquad x(x) = (2)\,(32)$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \pm\sqrt{64}$$
$$x = \pm 8$$

EJERCICIO 12

Precisa el valor de x en las siguientes proporciones:

1. $x : 4 = 6 : 8$
2. $3 : 5 = x : 12$
3. $3 : x = x : 27$
4. $x : 5 = 2x : (x + 3)$
5. $(x - 2) : 4 = 7 : (x + 2)$
6. $(2x + 8) : (x + 2) = (2x + 5) : (x + 1)$
7. $x : 2y = 18y : x$
8. $(x + 4) : 3 = 3 : (x - 4)$
9. $(x - 1) : 3 = 5 : (x +1)$
10. $2x : (x + 7) = 3 : 5$

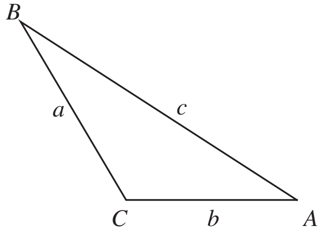
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

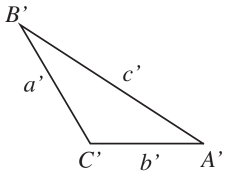
Semejanza

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Lados homólogos. Son aquellos cuyos ángulos adyacentes son iguales.

a con a', b con b', c con c'





Para indicar que 2 triángulos son semejantes se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, donde el símbolo ($\sim$) se lee: es semejante.

Propiedades fundamentales

1. Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.

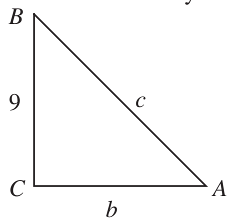
$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ y } \angle C = \angle C'$$

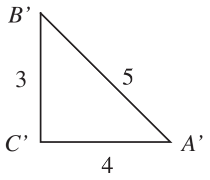
2. Dos triángulos son semejantes si la razón de cada par de lados homólogos es constante, es decir, si sus lados son respectivamente proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

EJEMPLOS

1 Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, encuentra el valor de b y c.





Solución

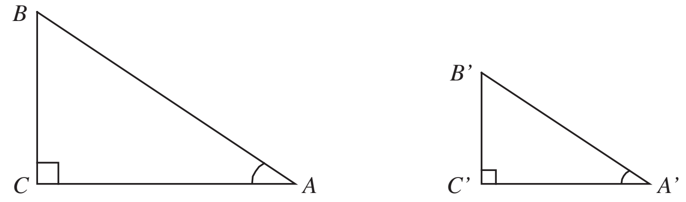
La proporcionalidad entre los lados se establece como $\frac{9}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, de la cual se obtiene:

$$\frac{c}{5} = \frac{9}{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{9(5)}{3} = 15$$

$$\frac{b}{4} = \frac{9}{3} \quad \rightarrow \quad b = \frac{4(9)}{3} = 12$$

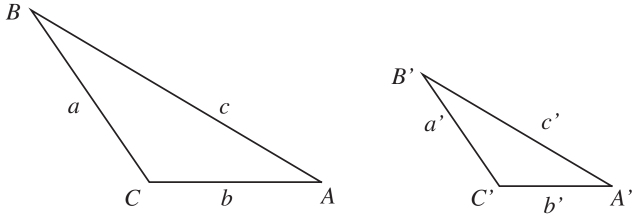
Teoremas de semejanza

➲ **Teorema 1.** Dos triángulos son semejantes si tienen 2 ángulos homólogos.



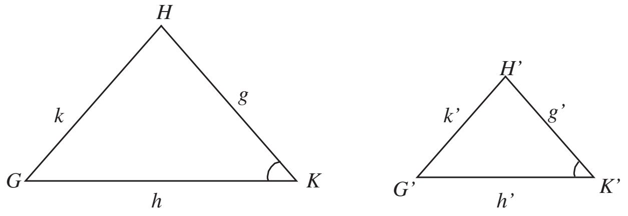
Si $\angle C = \angle C'$ y $\angle A = \angle A'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

➲ **Teorema 2.** Dos triángulos son semejantes si sus 3 lados son proporcionales.



Si $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

➲ **Teorema 3.** Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.

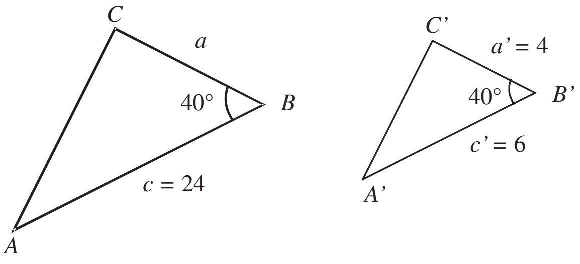


Si $\angle K = \angle K'$ y $\frac{g}{g'}=\frac{h}{h'}$, entonces $\Delta GHK \sim \Delta G'H'K'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Los siguientes triángulos son semejantes, determina la longitud del lado a en el triángulo ΔABC



Solución

Se establece la proporción entre los lados homólogos:

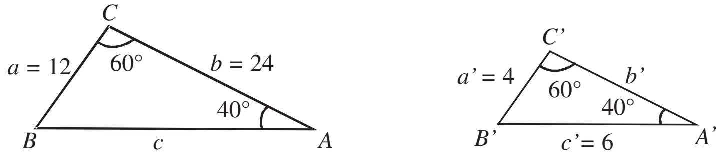
$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

Se sustituyen los valores respectivos y se despeja para a,

$$\frac{a}{4}=\frac{24}{6} \qquad \text{donde} \qquad a = \frac{4(24)}{6} = 16$$

Por tanto, el valor de $a = 16$

2 Encuentra la longitud de los lados b' y c:



Solución

En los triángulos $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ por lo que se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.

$$\frac{12}{4} = \frac{24}{b'} = \frac{c}{6}$$

De esta relación se obtiene:

$$\frac{12}{4} = \frac{24}{b'} \quad \rightarrow \quad b' = \frac{(4)(24)}{12} = 8$$

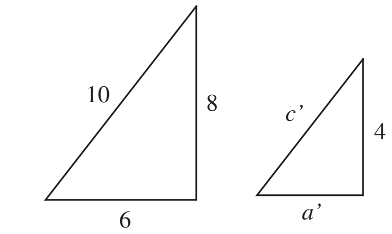
$$\frac{12}{4} = \frac{c}{6} \quad \rightarrow \quad c = \frac{(12)(6)}{4} = 18$$

Entonces se deduce que, $b' = 8$ y $c = 18$

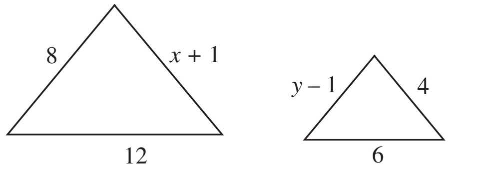
EJERCICIO 13

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan triángulos semejantes y las medidas de alguno de sus lados. Encuentra las medidas de los lados restantes y los valores de las incógnitas.

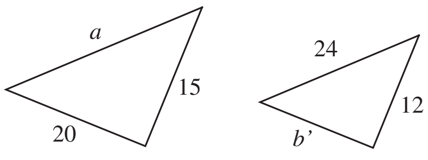
1.



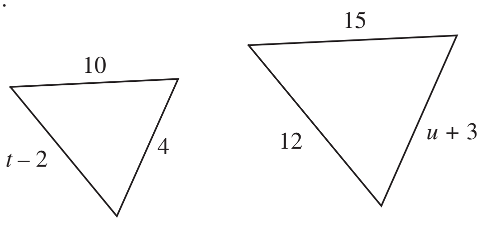
4.



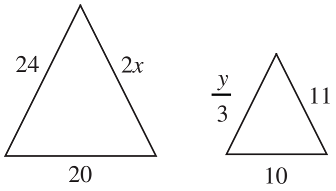
2.



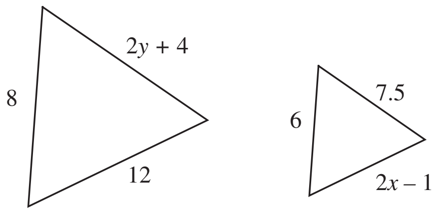
5.



3.



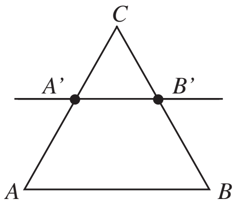
6.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Tales

Cuando en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al primero.



Si $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, entonces
$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina el valor de x, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Solución

Por semejanza de triángulos, la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{12}{x+12} = \frac{14}{42}$$

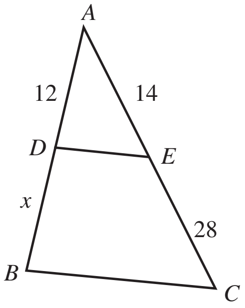
Se realiza un producto cruzado y se resuelve la ecuación para x:

$$(12)(42) = (14)(x+12)$$

$$504 = 14x + 168$$

$$504 - 168 = 14x$$

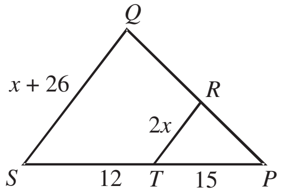
Por tanto $x = 24$



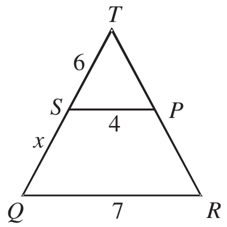
EJERCICIO **14**

Calcula el valor de x en las siguientes figuras:

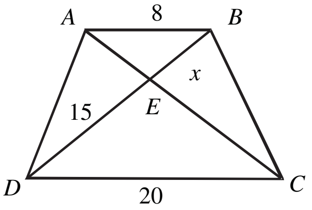
1. Si $\overline{RT}\parallel\overline{QS}$



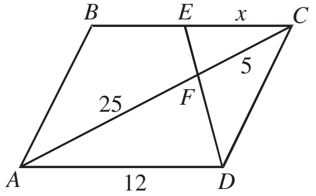
2. Si $\overline{QR}\parallel\overline{SP}$



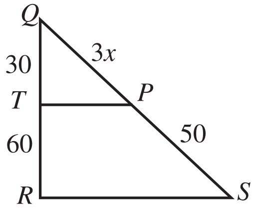
3.



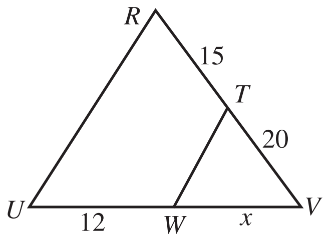
4.



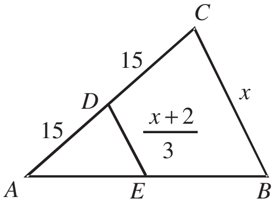
5. Si $\overline{TP}\parallel\overline{RS}$



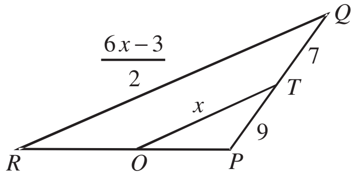
6. Si $\overline{TW}\parallel\overline{UR}$



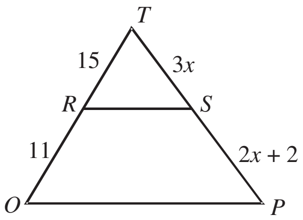
7. Si $\overline{DE}\parallel\overline{CB}$



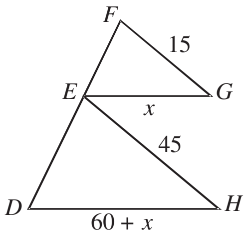
8. Si $\overline{OT}\parallel\overline{RQ}$



9. Si $\overline{RS}\parallel\overline{OP}$



10. Si $\overline{EG}\parallel\overline{DH}$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

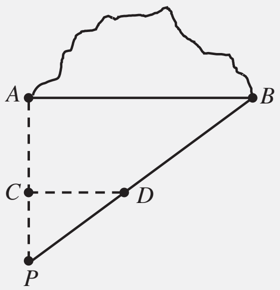
PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para encontrar la longitud de la base de un cerro, se construyó una pareja de triángulos rectángulos semejantes como se muestra en la figura, en la cual $\overline{PA} = 180\ m$, $\overline{CD} = 150\ m$ y $\overline{PC} = 50\ m$. ¿Cuánto mide la longitud del cerro?

Solución

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$$



Se sustituyen los valores dados,

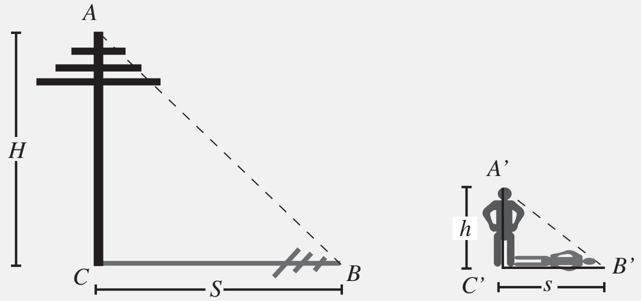
$$\frac{\overline{AB}}{150} = \frac{180}{50}$$

Donde,

$$\overline{AB} = \frac{150(180)}{50} = \frac{27\,000}{50} = 540$$

Por tanto, $\overline{AB} = 540\ m$

2 ¿Qué altura tiene un poste que proyecta una sombra de 16 *m*, al mismo tiempo que un observador de 1.80 *m* de estatura proyecta una sombra de 1.20 *m*?



Solución

De acuerdo con el problema, la relación entre los ángulos es la siguiente:

$$\angle CAB = \angle C'A'B' \text{ y } \angle ABC = \angle A'B'C'$$

Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ y la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{H}{h} = \frac{S}{s}$$

Donde

$$h = 1.80\ m,\ S = 16\ m \text{ y } s = 1.20\ m$$

Los cuales, al sustituirlos en la proporción, determinan que:

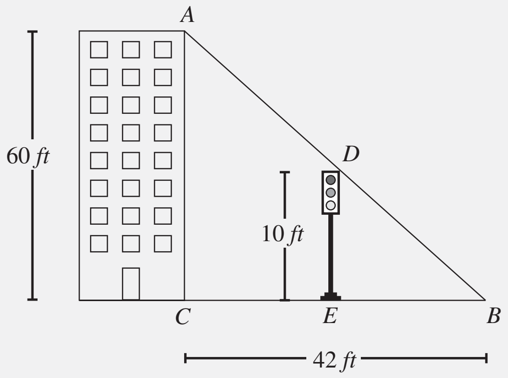
$$\frac{H}{1.80} = \frac{16}{1.20}$$

Entonces, se resuelve para H:

$$H = \frac{(16)(1.80)}{1.20} = \frac{28.8}{1.20} = 24\ m$$

Finalmente, resulta que la altura del poste es de 24 *m*.

3 A cierta hora del día un edificio de 60 *ft* de altura proyecta una sombra de 42 *ft*. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un semáforo de 10 *ft* de altura a la misma hora?



Solución

De la figura,

$$\angle CAB = \angle EDB, \text{ por ser ángulos correspondientes.}$$

$$\angle ABC = \angle DBE, \text{ por ser ángulo común.}$$

Por tanto, los triángulos son semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBE$$

Y la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}}$$

Donde,

$$\overline{AC} = 60\,ft,\ \overline{DE} = 10\,ft \text{ y } \overline{CB} = 42\,ft$$

Los cuales, al sustituirlos en la proporción, determinan que:

$$\frac{60}{10} = \frac{42}{\overline{EB}}$$

Y al despejar $\overline{EB}$,

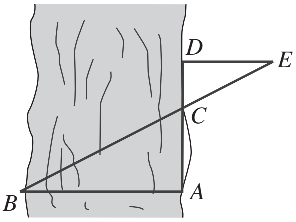
$$\overline{EB} = \frac{42(10)}{60} = 7\,ft$$

Por consiguiente, la sombra que proyecta el semáforo es de 7 *ft*.

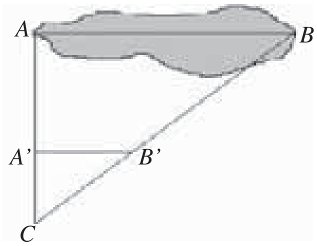
EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes problemas:

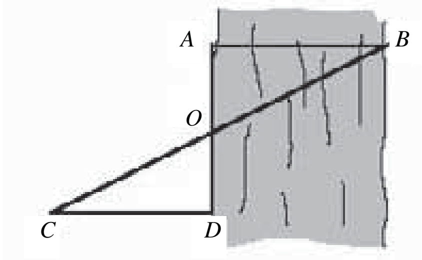
1. Para encontrar la anchura $\overline{AB}$ de un río se construyeron 2 triángulos semejantes, como se muestra en la figura. Y al medir se encontró que: $\overline{AC} = 17\ m$, $\overline{CD} = 5\ m$, $\overline{DE} = 20\ m$. ¿Cuál es la anchura del río?



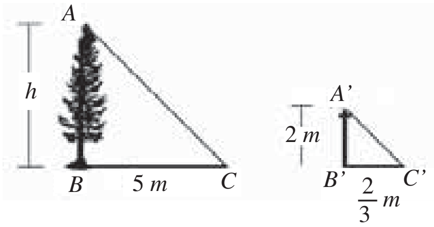
2. Para medir lo largo de un lago se construyeron los siguientes triángulos semejantes, en los cuales se tiene que: $\overline{AC} = 215\ m$, $\overline{A'C} = 50\ m$, $\overline{A'B'} = 112\ m$. ¿Cuál es la longitud del lago?



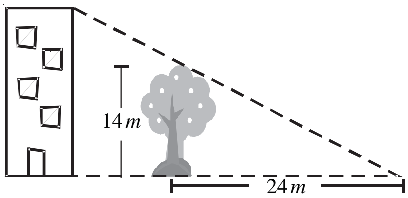
3. Para medir la anchura de un río se forman los siguientes triángulos, en los que: $\overline{AO} = 32\ m$, $\overline{CD} = 30\ m$, $\overline{OD} = 6\ m$. Encuentra $\overline{AB}$.



4. Un árbol proyecta una sombra de 5 m a la misma hora en que un poste de 2 m de altura, muy próximo al árbol, proyecta una sombra de $\frac{2}{3}\ m$. Determina la altura h del árbol, si tanto éste como el poste son perpendiculares al terreno.



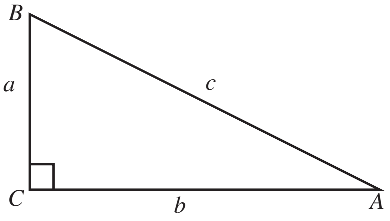
5. Un árbol de 14 m de altura próximo a una torre, proyecta una sombra de 24 m a la misma hora. Determina:
   a) La altura de la torre, si su sombra es de 48 m.
   b) La sombra que refleja la torre, si su altura es de 70 m.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

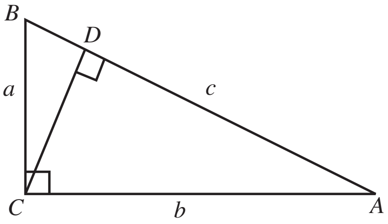


c: hipotenusa

a, b: catetos

$c^2 = a^2 + b^2$

Demostración: Se traza la altura sobre la hipotenusa:



Los triángulos $\Delta\, ABC \sim \Delta\, CBD$ por ser $\angle\, ABC = \angle\, CBD$ y $\angle CAB = \angle\, DCB$ entonces,

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{\overline{BD}} \qquad \text{donde} \qquad c \cdot \overline{BD} = a^2$$

Los triángulos $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ACD$ por ser $\angle\, CAB = \angle\, DAC$ y $\angle\, ABC = \angle\, ACD$ entonces,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{\overline{AD}} \qquad \text{donde} \qquad c \cdot \overline{AD} = b^2$$

Al sumar $c \cdot \overline{BD} = a^2$ y $c \cdot \overline{AD} = b^2$, se obtiene,

$$c \cdot \overline{BD} + c \cdot \overline{AD} = a^2 + b^2$$

$$c\left(\overline{BD} + \overline{AD}\right) = a^2 + b^2$$

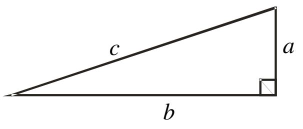
Pero $\overline{BD} + \overline{AD} = c$, por tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo

Determina el valor de la hipotenusa del triángulo que se muestra, según los datos proporcionados en cada uno de los siguientes incisos:

a) $b = 12, a = 9$ *b*) $a = 3, b = 6$ *c*) $a = 3, b = 7$



Soluciones

a) $a = 12, b = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (9)^2 + (12)^2$

$c^2 = 81 + 144$

$c^2 = 225$

$c = \sqrt{225} = 15$

b) $a = 3, b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (3)^2 + (6)^2$

$c^2 = 9 + 36$

$c^2 = 45$

$c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

c) $a = 3, b = 7$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (3)^2 + (7)^2$

$c^2 = 9 + 49$

$c^2 = 58$

$c = \sqrt{58}$

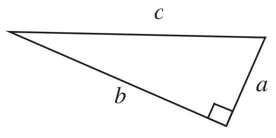
Obtención de los catetos. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual a la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.

$$a^2 = c^2 - b^2; \; b^2 = c^2 - a^2$$

Ejemplo

Utiliza la figura para determinar el cateto que se pide en cada inciso:

a) $a = 24, c = 25$ *b*) $b = 6, c = 8$ *c*) $a = 4\sqrt{3}, c = 8$



Soluciones

a) $a = 24, c = 25$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (25)^2 - (24)^2$

$b^2 = 625 - 576$

$b^2 = 49$

$b = \sqrt{49} = 7$

b) $b = 6, c = 8$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = (8)^2 - (6)^2$

$a^2 = 64 - 36$

$a^2 = 28$

$a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

c) $a = 4\sqrt{3}, c = 8$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (8)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2$

$b^2 = 64 - 48$

$b^2 = 16$

$b = \sqrt{16} = 4$

Naturaleza del triángulo a partir del teorema de Pitágoras

Sea el triángulo ABC, cuyo lado mayor es el lado c, éste será un triángulo: rectángulo, acutángulo u obtusángulo, si al aplicar el teorema de Pitágoras se cumple que:

1. Si $c^2 = a^2 + b^2$, el triángulo es rectángulo

2. Si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces $\begin{cases} c^2 < a^2 + b^2, \text{ el triángulo es acutángulo} \\ c^2 > a^2 + b^2, \text{ el triángulo es obtusángulo} \end{cases}$

EJEMPLOS

1 Sea un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades. Comprueba si es un triángulo rectángulo.

Solución

Se toma el valor mayor como la hipotenusa:

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

2 Sea el triángulo cuyos lados miden 7, 9 y 12 unidades. Determina qué tipo de triángulo es:

Solución

Se toma el mayor de los lados como c, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad (12)^2 = (9)^2 + (7)^2 \quad \rightarrow \quad 144 = 81 + 49$$
$$144 \neq 130$$

Dado que $144 > 130$, el triángulo es obtusángulo.

3 Determina la naturaleza de un triángulo cuyos lados miden 6, 4 y 5 unidades.

Solución

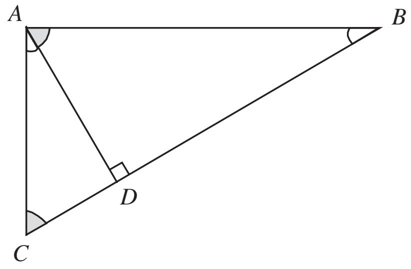
Al aplicar el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(6)^2 = (4)^2 + (5)^2 \quad \rightarrow \quad 36 = 16 + 25 \quad \rightarrow \quad 36 \neq 41$$

Puesto que $36 < 41$, el triángulo es acutángulo.

Teoremas de semejanza en triángulos rectángulos

- **Teorema 1.** La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, forma dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo dado, y a su vez semejantes entre ellos.

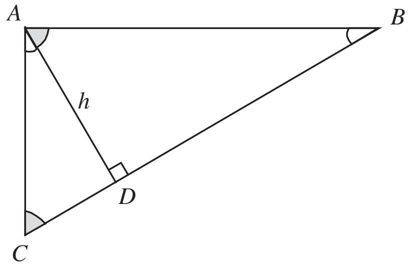


$\Delta ACD \sim \Delta BAD$

$\Delta CAB \sim \Delta CDA$

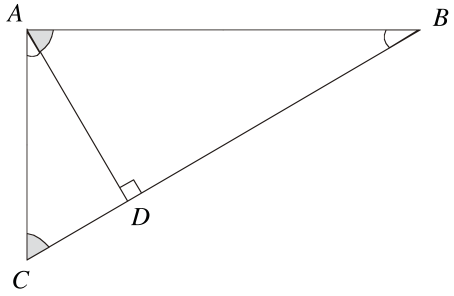
$\Delta CAB \sim \Delta ADB$

- **Teorema 2.** La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre la medida de los segmentos de la hipotenusa.



$$h^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DB}$$

- **Teorema 3.** Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es la media proporcional de la hipotenusa y la medida del segmento de la hipotenusa interceptado por la altura, y el lado que es adyacente a ese cateto.



$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CB}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{DB}$$

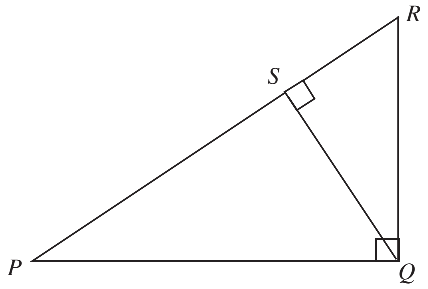
EJERCICIO 16

Si a y b son los catetos de un triángulo y c su hipotenusa, determina el lado que falta:

1. $a = 15, b = 20$
2. $a = 5, b = 4$
3. $a = 8, b = 4$
4. $a = 7, b = 7$
5. $a = 12, c = 20$
6. $b = 6, c = 8$
7. $b = 15, c = 17$
8. $a = 5\sqrt{2}, c = 10$
9. $a = 6\ m$ y $b = 3$
10. $a = 12\ m$ y $c = 13\ m$
11. $a = 14\ cm$ y $b = 15\ cm$
12. $b = 15\ dm$ y $c = 20\ dm$

Determina la naturaleza de los siguientes triángulos, cuyos lados miden:

13. 4, 5 y 7 cm
14. 5, 12 y 13 cm
15. 7, 9 y 11 cm
16. 7, 24 y 25 cm
17. 6, 8 y 10 mm
18. 1, $\sqrt{2}$ y 2 cm
19. $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ y 1 cm
20. 0.5, 0.7 y 0.8 m
21. $x, x - 1$ y $\sqrt{2x^2 - 2x + 1}$
22. En el triángulo rectángulo PQR, con Q el ángulo recto y $\overline{QS}$ como altura trazada hacia la hipotenusa:



a) Determina $\overline{QS}$ si $\overline{PS} = 12$ y $\overline{SR} = 5$

b) Encuentra $\overline{QR}$ si $\overline{PR} = 25$ y $\overline{RS} = 13$

c) Halla $\overline{QR}$ si $\overline{PS} = 6$, $\overline{PQ} = 2\sqrt{15}$ y $\overline{RS} = 4$

d) Encuentra $\overline{PQ}$ si $\overline{PS} = 21$ y $\overline{RS} = 15$

e) Determina $\overline{PQ}$ si $\overline{RS} = 6$, $\overline{RQ} = 10$ y $\overline{QS} = 8$

f) Determina $\overline{QS}$ si $\overline{PQ} = 13$ y $\overline{QR} = 7$

g) Encuentra $\overline{RS}$ si $\overline{PQ} = 17$ y $\overline{QS} = 13$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Determina la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado x *cm*.

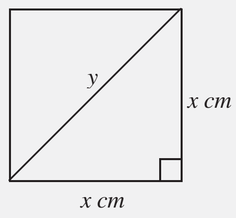
Solución

Al trazar la diagonal en un cuadrado, se forman 2 triángulos rectángulos, entonces:

$(hip)^2 = (cat)^2 + (cat)^2 \qquad y^2 = x^2 + x^2$

$y^2 = 2x^2$

$y = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$



Por tanto, la diagonal es $x\sqrt{2}$

2 Al abrir una escalera de pintor, se forma un triángulo isósceles, la distancia entre las bases es de 1 *m* y los lados iguales miden 1.40 *m*. Determina la altura de la escalera.

Solución

La altura de un triángulo isósceles divide a la base en 2 partes iguales, formándose 2 triángulos rectángulos:

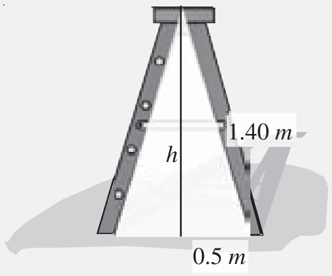
$h^2 = (1.4)^2 - (0.5)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 1.96 - 0.25$

$h^2 = 1.71$

$h = \sqrt{1.71}$

$h = 1.3\ m$

Por consiguiente, la altura de la escalera es de 1.3 *m*.



3 Un automóvil viaja a una velocidad constante de 2.5 *m/s* y pasa por debajo de un puente peatonal. Determina a los 12 *s*, la distancia entre el automóvil y el punto ubicado exactamente arriba del paso del mismo, si la altura del puente es de 6 *m*.

Solución

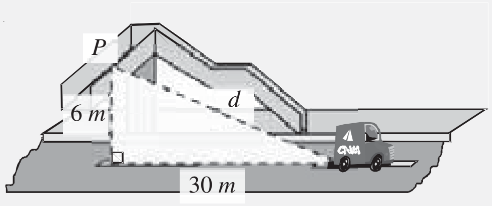
La altura del puente es de 6 *m* y a los 12 *s* el automóvil recorre 12(2.5) = 30 *m*, entonces:

$d^2 = (6)^2 + (30)^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 36 + 900$

$d^2 = 936$

$d = \sqrt{936}$

$d = 30.5\ m$

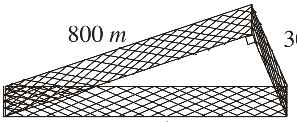


En consecuencia, la distancia es de 30.5 *m*.

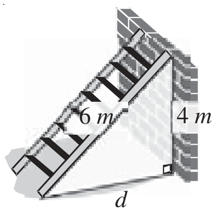
EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes problemas:

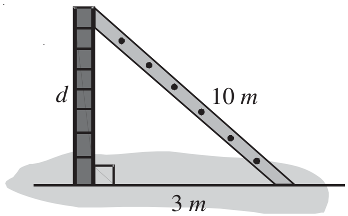
1. Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 300 y 800 m. ¿Qué cantidad de maya se necesita para cercarlo?



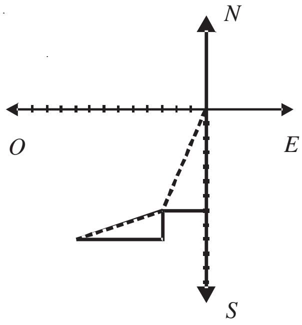
2. Con una escalera de 6 m se desea subir al extremo de una barda de 4 m de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?



3. Calcula la altura de un triángulo isósceles si su base mide 60 cm y cada uno de sus lados mide 50 cm.
4. Calcula la altura de un triángulo equilátero que de lado mide 10 cm.
5. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, cuya diagonal mide 8 m?
6. ¿A qué altura llega una escalera de 10 m de largo en un muro vertical, si su pie está a 3 m del muro?



7. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su diagonal mide $5\sqrt{2}$ cm?
8. Si el lado de un hexágono regular mide 16 cm, ¿cuánto mide su apotema?
9. Una persona camina 7 kilómetros hacia el sur, 3 hacia el oeste, 2 hacia el sur y 6 más hacia el oeste. ¿Cuál es la distancia entre el punto de partida y su destino?

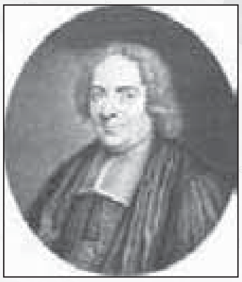


10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 10 cm. Encuentra la longitud de los catetos.
11. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a m y la mediana de uno de los ángulos agudos es igual a $\frac{m\sqrt{3}}{3}$. Determina la magnitud de los catetos.
12. En un triángulo rectángulo, m y n representan la longitud de las medianas trazadas a los catetos. Obtén la longitud de éstos y la hipotenusa en función de m y n.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 5
CUADRILÁTEROS

Pierre VARIGNON



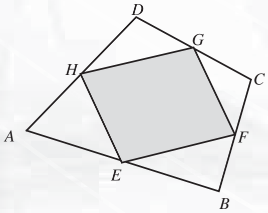
Pierre Varignon
(1654-1722)

Estaba destinado al oficio religioso, pero la impresión que le produjo la lectura de los *Elementos de Euclides* le llevó hacia las matemáticas. Se interesó por la mecánica, por el incipiente cálculo infinitesimal y por la geometría.

Teorema de Varignon

Dado un cuadrilátero cualquiera *ABCD*, el polígono que determinan los puntos medios (*E*, *F*, *G*, *H*) de sus lados es un paralelogramo, y el área de éste es la mitad de la del cuadrilátero inicial.

$$\text{Área}_{EFGH} = \frac{1}{2}\,\text{Área}_{ABCD}$$



Definición

El cuadrilátero es todo polígono de 4 lados.

Clasificación

Los cuadriláteros se dividen en:

Paralelogramo. Es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Cuadrado. Es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos son rectos.

Rectángulo. Es el paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales y los 4 ángulos rectos.

Rombo. Es el paralelogramo que tiene los lados iguales y ángulos contiguos desiguales.

Romboide. Es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y ángulos oblicuos.

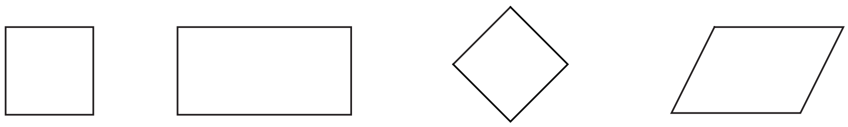
Trapecio. Es el cuadrilátero que sólo tiene 2 de sus lados paralelos.

Trapecio rectángulo. Es el que tiene 2 de sus ángulos rectos.

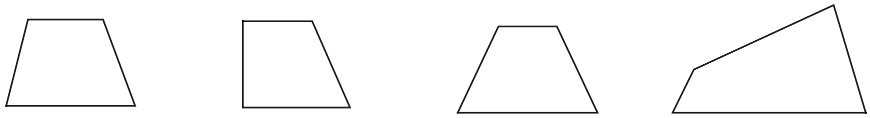
Trapecio isósceles. Es el que tiene 2 lados no paralelos iguales.

Trapecio escaleno. Es aquel que tiene sus lados no paralelos diferentes.

Trapezoide. Es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a su opuesto.



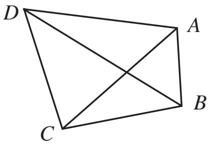
Cuadrado Rectángulo Rombo Romboide



Trapecio Trapecio rectángulo Trapecio isósceles Trapezoide

Diagonal. Es el segmento de recta que une 2 vértices de un cuadrilátero no adyacentes.

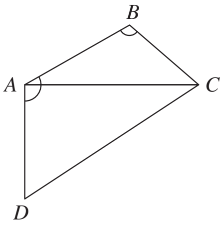
$\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *son diagonales*



Teorema

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.

Demostración: Dado el cuadrilátero *ABCD*, se traza una de sus diagonales:



Se observa que se forman dos triángulos ΔABC y ΔACD.
La suma de los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180°.

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$$

$$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180°$$

Al sumar ambas expresiones, se obtiene:

$$\angle BAC + \angle DAC + \angle ABC + \angle ADC + \angle ACB + \angle ACD = 360°$$

$$\text{pero } \angle BAC + \angle DAC = \angle BAD \text{ y } \angle ACB + \angle ACD = \angle BCD$$

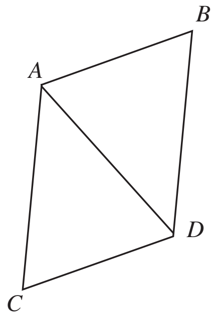
Al sustituir estas igualdades en la expresión anterior:

$$(\angle BAC + \angle DAC) + \angle ABC + \angle ADC + (\angle ACB + \angle ACD) = 360°$$

$$\angle BAD + \angle ABC + \angle ADC + \angle BCD = 360°$$

Por consiguiente, queda demostrado el teorema.

Propiedades de los paralelogramos



1. Los lados opuestos son iguales.

   $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$

2. Los ángulos opuestos son iguales.

   $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle C$

3. Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

   $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$

   $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$

4. Las diagonales se bisecan mutuamente.

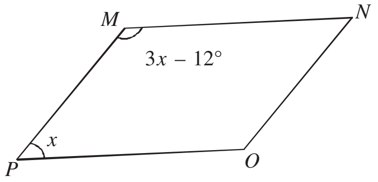
5. La diagonal lo divide en 2 triángulos congruentes.

   $\Delta ABD \cong \Delta CDA$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los ángulos interiores del siguiente paralelogramo:



Solución

En todo paralelogramo, los ángulos adyacentes son suplementarios, entonces:

$\angle P + \angle M = 180° \quad \rightarrow \quad x + 3x - 12° = 180° \quad \rightarrow \quad 4x = 180° + 12°$

$4x = 192°$

$x = \frac{192°}{4} = 48°$

Luego, los ángulos opuestos son iguales, por tanto:

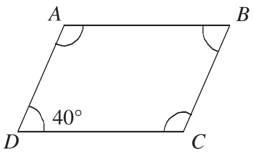
$\angle N = \angle P = 48°$

$\angle O = \angle M = 3(48°) - 12° = 144° - 12° = 132°$

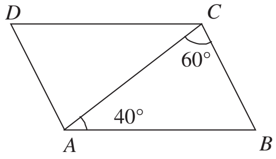
EJERCICIO 18

Encuentra los datos que se piden en cada uno de los siguientes paralelogramos:

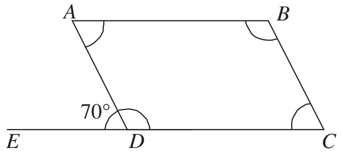
1. Determina $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$



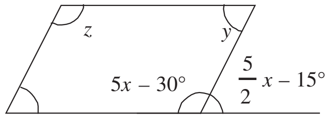
2. Encuentra $\angle DCA$, $\angle CAD$, $\angle DAB$, $\angle DCB$, $\angle D$ y $\angle B$



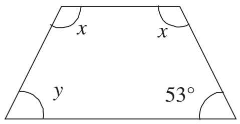
3. Encuentra $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle ADC$



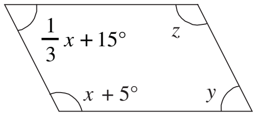
4. Determina el valor x, $\angle y$ y $\angle z$



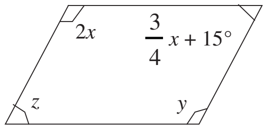
5. Halla el valor de x y y



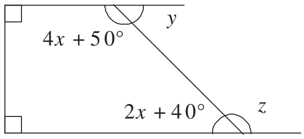
6. Calcula la medida de los ángulos y y z



7. Precisa el valor de x y la medida de los ángulos y y z



8. Halla el valor de x y la medida de los ángulos y y z



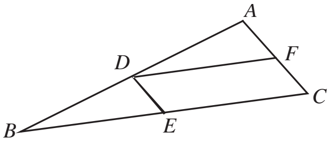
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostraciones

Para que un cuadrilátero sea un paralelogramo se debe probar que 2 de sus lados son iguales y paralelos.

EJEMPLOS

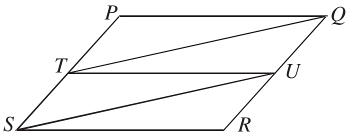
1 Sea el triángulo ABC cuyos puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son D, E y F respectivamente, demostrar que $DFCE$ es un paralelogramo.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{DE}=\overline{FC}$, $\overline{DE}\parallel\overline{FC}$	1. En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a la mitad del tercer lado. $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\left(\overline{AF}+\overline{FC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overline{FC}\right)=\overline{FC}$
2. $\overline{DF}=\overline{EC}$, $\overline{DF}\parallel\overline{EC}$	2. En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a la mitad del tercer lado. $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\left(\overline{BE}+\overline{EC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overline{EC}\right)=\overline{EC}$
3. $DFCE$ es paralelogramo	3. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, es un paralelogramo.

2 Sea $PQRS$ los vértices de un paralelogramo, T el punto medio de $\overline{PS}$ y U el punto medio de $\overline{RQ}$, demuestra que $TQUS$ es un paralelogramo.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{PT}=\overline{TS}$	1. T es el punto medio del segmento $\overline{PS}$
2. $\overline{QU}=\overline{UR}$	2. U es el punto medio del segmento $\overline{QR}$
3. $\overline{PS}=\overline{QR}$ y $\overline{PS}\parallel\overline{QR}$	3. En un paralelogramo los lados opuestos son iguales y paralelos.
4. $\overline{TS}=\overline{QU}$	4. De la afirmación 3, se tiene que $\overline{PS}=\overline{QR}$, entonces: $\overline{PT}+\overline{TS}=\overline{QU}+\overline{UR}\rightarrow 2\overline{TS}=2\overline{QU}\rightarrow \overline{TS}=\overline{QU}$
5. $\overline{TS}\parallel\overline{QU}$	5. Son segmentos de $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$, los que a su vez son paralelos.
6. $TQUS$ es paralelogramo	6. Dos lados opuestos $\overline{TS}$ y $\overline{QU}$ son paralelos e iguales.

EJERCICIO 19

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Sea *ABCD* los vértices de un paralelogramo, *P* y *Q* dos puntos sobre la diagonal $\overline{AC}$, de modo que $\overline{PA}$ es congruente con $\overline{QC}$, demuestra que *PBQD* es paralelogramo.

2. Sea *ABCD* los vértices de un paralelogramo, *E* y *F* son puntos sobre la diagonal $\overline{AC}$, de tal manera que $\overline{DF}$ biseca al $\angle ADC$ y $\overline{BE}$ biseca al $\angle ABC$, demuestra que *DEBF* es paralelogramo.

3. Sea *RSTU* un paralelogramo, *V* y *W* puntos sobre la diagonal $\overline{TR}$ de modo que $\overline{UW}$ y $\overline{SV}$ son perpendiculares a $\overline{TR}$, demuestra que *UWSV* es un paralelogramo.

4. Sea *ABCD* los vértices de un paralelogramo, *Q*, *R*, *S*, *T*, puntos sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ respectivamente, de tal manera que $\overline{AQ} \cong \overline{CS}$ y $\overline{BR} \cong \overline{TD}$, demuestra que *QRST* es paralelogramo.

5. Sea *PQRS* los vértices de un trapecio, $\overline{SR}$ es paralelo a $\overline{PQ}$ y $\overline{PS} \cong \overline{SR}$, demuestra que $\overline{RP}$ biseca $\angle P$.

6. Demuestra que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo, es igual al doble producto de la suma del cuadrado de sus lados adyacentes.

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones.

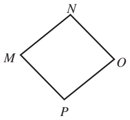
Paralelogramos especiales

Se les denomina así al rectángulo, al rombo y al cuadrado, los cuales pertenecen al conjunto de los paralelogramos y se definen de la siguiente manera:

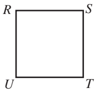
Rectángulo. Es el paralelogramo que tiene sus ángulos iguales, también se le conoce como paralelogramo equiángulo.

Rombo. Paralelogramo que tiene sus lados iguales, también recibe el nombre de paralelogramo equilátero.

$$\overline{MN} = \overline{NO} = \overline{OP} = \overline{PM}$$



Cuadrado. Se define como el paralelogramo equiángulo y equilátero, esto es, un cuadrado es un rectángulo y a la vez un rombo.



$$\angle R = \angle S = \angle T = \angle U = 90°;\ \overline{RS} = \overline{ST} = \overline{TU} = \overline{UR}$$

Propiedades

1. Los rectángulos tienen sus ángulos rectos.

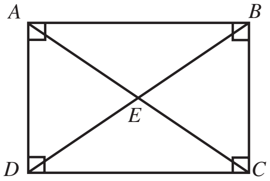
   $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

2. Las diagonales de un rectángulo son iguales.

   $\overline{AC} = \overline{BD}$

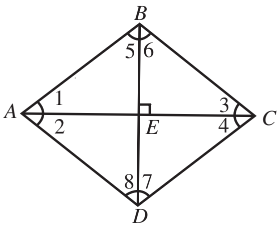
3. Las diagonales de un rectángulo forman 2 pares de triángulos congruentes.

   $\Delta AED \cong \Delta BEC;\ \Delta DEC \cong \Delta AEB$



4. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y se bisecan mutuamente, esto es, una diagonal es mediatriz de la otra.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AE} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{ED}$



5. Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos formados por los vértices que unen.

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$ y $\angle 7 = \angle 8$

6. Las diagonales de un rombo forman 4 triángulos congruentes.

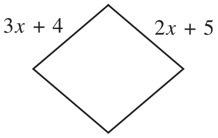
$\Delta AED \cong \Delta BEC \cong \Delta AEB \cong \Delta CED$

Los cuadrados por ser rectángulos y rombos a la vez, cumplen con las propiedades anteriores.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de los lados del siguiente rombo:



Solución

En un rombo, los lados son iguales, entonces:

$$3x + 4 = 2x + 5 \quad \rightarrow \quad 3x - 2x = 5 - 4 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

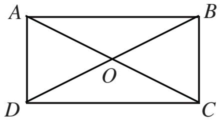
Luego, sustituyendo $x = 1$ en cualquiera de los lados, se obtiene:

$$3x + 4 = 3(1) + 4 = 7$$

Por tanto, los lados del rombo miden $7u$.

2 Encuentra la longitud del lado $\overline{AD}$ en el siguiente rectángulo, si $\overline{AC} = 13$, $\overline{DB} = 3x + 4$ y $\overline{AD} = x + 2$

Solución



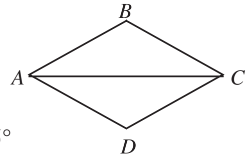
En todo rectángulo, las diagonales son iguales, esto es:

$$\overline{AC} = \overline{DB} \quad \rightarrow \quad 13 = 3x + 4 \quad \rightarrow \quad 9 = 3x \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Luego, $\overline{AD} = x + 2$, por tanto, $\overline{AD} = 3 + 2 = 5u$.

3 En el rombo $ABCD$, determina el valor de $\angle ABC$ si $\angle BAC = 6x$ y $\angle DAC = 4x + 10°$

Solución



En el rombo, la diagonal $\overline{AC}$ biseca al ángulo BAD, esto es:

$$\angle BAC = \angle DAC \quad \rightarrow \quad 6x = 4x + 10° \quad \rightarrow \quad 2x = 10° \quad \rightarrow \quad x = 5°$$

Por otro lado, en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales y como $\overline{AC}$ es diagonal, se deduce que $\angle BAC = \angle BCA = 30°$, luego, en el triángulo BAC:

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180° \quad \rightarrow \quad \angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA)$$

$$\angle ABC = 180° - 60°$$

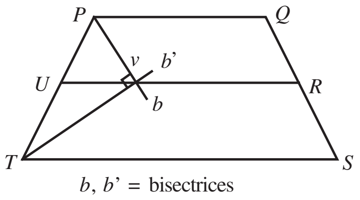
$$\angle ABC = 120°$$

Por tanto, el ángulo ABC mide 120°.

Propiedades de los trapecios

1. En un trapecio la longitud de la línea media (paralela media) es igual a la semisuma de las bases del trapecio.

$$\overline{UR} = \frac{\overline{PQ} + \overline{TS}}{2}$$



2. Las bisectrices de los ángulos adyacentes al lado lateral del trapecio son perpendiculares y el punto de intersección se encuentra en su línea media.

$$\overline{PV} \perp \overline{TV}$$

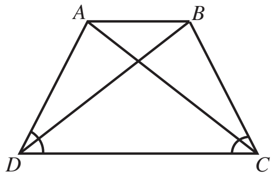
Propiedades de los trapecios isósceles

1. Los ángulos de la base son iguales.

$$\angle D = \angle C$$

2. Sus diagonales son iguales.

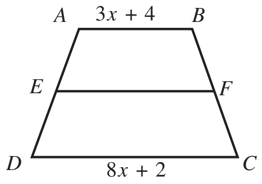
$$\overline{DB} = \overline{AC}$$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de las bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ del siguiente trapecio si E y F son puntos medios y $\overline{EF}$ mide 14 *cm*.



Solución

En todo trapecio la longitud de la paralela media es igual a la semisuma de las bases:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$$

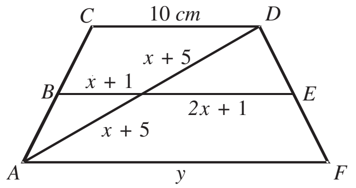
Al sustituir, se tiene:

$$14 = \frac{(3x+4)+(8x+2)}{2} \quad \rightarrow \quad 28 = 11x + 6 \quad \rightarrow \quad 22 = 11x \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Por consiguiente, las longitudes de las bases son:

$$\overline{AB} = 3x + 4 = 3(2) + 4 = 10 \quad ; \quad \overline{DC} = 8x + 2 = 8(2) + 2 = 18$$

2 Determina la longitud de la diagonal $\overline{AD}$ en el siguiente trapecio, si $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$, B y E son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ respectivamente.



Solución

De la figura se tiene que $\overline{BE} = \dfrac{\overline{CD}+\overline{AF}}{2}$, entonces:

$$x + 1 + 2x + 1 = \frac{10+y}{2} \quad \rightarrow \quad 2(3x + 2) = 10 + y \quad \rightarrow \quad y = 6x - 6$$

En el triángulo ADF, por proporcionalidad, se establece que:

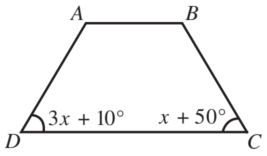
$$\frac{2x+1}{y} = \frac{x+5}{2x+10} \quad \rightarrow \quad \frac{2x+1}{y} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 4x + 2 = y$$

Se sustituye $y = 6x - 6$:

$$4x + 2 = 6x - 6 \quad \rightarrow \quad 2x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Por tanto, $\overline{AD} = 2x + 10 = 2(4) + 10 = 8 + 10 = 18\ cm$

3 Determina el valor de los ángulos de la base del siguiente trapecio isósceles:



Solución

Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales:

$$3x + 10° = x + 50° \quad \rightarrow \quad 3x - x = 50° - 10° \quad \rightarrow \quad 2x = 40°$$

$$x = 20°$$

En consecuencia, los ángulos de la base miden:

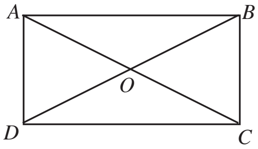
$$3(20°) + 10° = 60° + 10° = 70°$$

EJERCICIO 20

Resuelve los siguientes problemas:

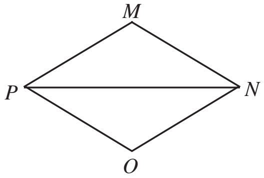
1. Encuentra el valor de x en el rectángulo $ABCD$, si $\overline{AC} = 24\ cm$ y $\overline{BD} = 5x + 4$

2. Determina la longitud de los lados del rectángulo $ABCD$, si $\overline{AO} = 2\sqrt{5}$ y $\overline{AB} = 2\overline{BC}$

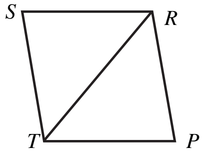


3. En el rombo $MNOP$, determina el valor de los lados si $\overline{MN} = 6x + 5$ y $\overline{MP} = 7x - 1$

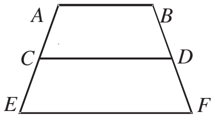
4. Determina el ángulo NPO, si $\angle\ PON = 132º$ y $\overline{NP}$ es bisectriz del ángulo P y N



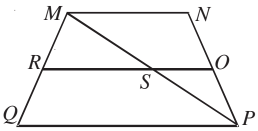
5. Halla el valor de x y y en el rombo $PRST$, si $\angle\ TRP = 2x + 10°$, $\angle\ RTS = x + 30°$ y $\angle\ TSR = y + 12°$



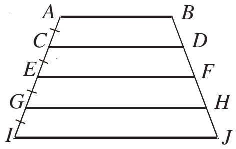
6. En la figura, C y D son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Encuentra el valor de $\overline{AB}$, si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CD} = x + 2$ y $\overline{EF} = 13\ cm$



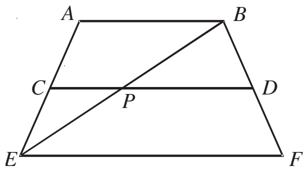
7. En la figura, R y O son puntos medios de $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$. Determina la longitud de $\overline{MN}$, si $\overline{OS} = 3x + 1$, $\overline{RS} = 14$ y $\overline{QP} = 9x + 1$



8. En la figura, los lados $\overline{AI}$ y $\overline{BJ}$ están divididos en 4 partes iguales. Encuentra la longitud de $\overline{AB}$ e $\overline{IJ}$, si $\overline{CD} = \frac{3a+b}{4}$ y $\overline{EF} = \frac{a+b}{2}$



9. En la figura, C y D son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Determina la longitud de $\overline{AE}$, si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CP} = y$, $\overline{PD} = 2y + 2$, $\overline{EF} = 11$, $\overline{AC} = \overline{CE} = x$

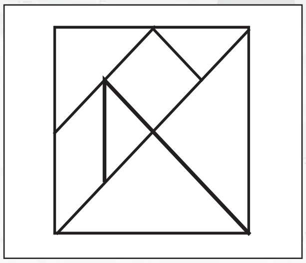


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 6

Polígonos

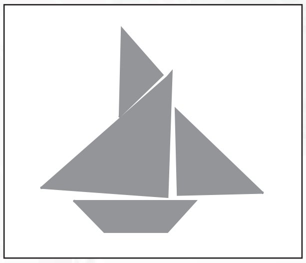
Reseña HISTÓRICA



Una de las aplicaciones de los polígonos es el antiguo juego llamado Tangram chino "tabla de la sabiduría", que se conforma de 7 piezas llamadas Tans y son:

- Cinco triángulos de diversos tamaños
- Un cuadrado
- Un paralelogramo romboide

Con ellas se pueden formar figuras cerradas como:



La palabra polígono procede del griego *poly*, muchos, y *gwnos*, ángulos.

Cada polígono recibe un nombre de acuerdo al número de lados que lo conforman; para saber cómo se llama un polígono de menos de cien lados se realiza la lectura del número de lados de acuerdo con la siguiente tabla.

Decenas		y	Unidades		Terminación
20	*Icosa-*	*-kai-*	1	*-Hena-*	*-gono*
30	*Triaconta-*		2	*-Di-*	
40	*Tetraconta-*		3	*-Tri-*	
50	*Pentaconta-*		4	*-Tetra-*	
60	*Hexaconta-*		5	*-Penta-*	
70	*Heptaconta-*		6	*-Hexa-*	
80	*Octaconta-*		7	*-Hepta-*	
90	*Eneaconta-*		8	*-Octa-*	
100	*Hecta-*		9	*-Enea-*	

Se cuenta el número de lados que tiene el polígono y se pone el prefijo conveniente, como en el siguiente ejemplo, y se agrega la terminación "gono".

El polígono de 78 lados recibe el nombre de:

"Heptacontakaioctágono"

Definición

Se llama polígono a aquella figura plana cerrada, delimitada por segmentos de recta. Se clasifican de acuerdo con la medida de sus lados o sus ángulos.

Clasificación

Los polígonos se clasifican de acuerdo con sus lados o la magnitud de sus ángulos interiores.

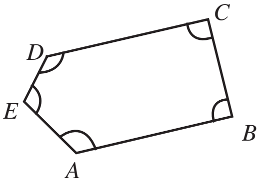
Por sus lados

Regulares. Tienen todos sus lados iguales.

Irregulares. Tienen la medida de sus lados diferentes.

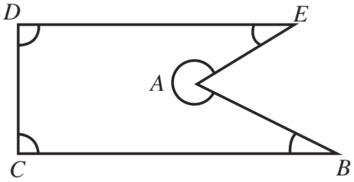
Por sus ángulos

Convexo. Los ángulos interiores son todos menores que 180°.



Todos los ángulos son menores que 180°

Cóncavo. Uno de sus ángulos interiores es mayor que 180°.



$\angle A > 180°$

- **Por su número de lados.** Los polígonos reciben un nombre según su número de lados, como se muestra a continuación:

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	12	Dodecágono
4	Cuadrilátero	13	Tridecágono
5	Pentágono	14	Tetradecágono
6	Hexágono	15	Pentadecágono
7	Heptágono	16	Hexadecágono
8	Octágono	17	Heptadecágono
9	Nonágono	18	Octadecágono
10	Decágono	19	Nonadecágono
11	Undecágono	20	Icoságono

Elementos

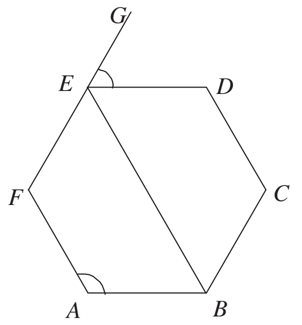
Todo polígono está formado por los siguientes elementos:

Vértice. Es el punto donde concurren 2 lados.

Ángulo interior. Es el que se forma con 2 lados adyacentes de un polígono.

Ángulo exterior. Aquel que se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente.

Diagonal. Es el segmento de recta que une 2 vértices no adyacentes.



Elementos:

A: vértice

$\angle BAF$: ángulo interior

$\angle DEG$: ángulo exterior

$\overline{EB}$: diagonal

Un polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos interiores, así como exteriores.

Número de diagonales

El número de diagonales en un polígono se obtendrá en función del número de lados.

Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice

En un polígono de n lados se pueden trazar $(n - 3)$ diagonales desde un solo vértice, entonces la fórmula es:

$$d = n - 3$$

Donde:

d = diagonales trazadas desde un solo vértice.

n = número de lados.

Número de diagonales totales

El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices está dado por la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde:

D = diagonales totales del polígono.

n = número de lados.

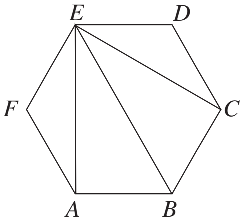
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en un hexágono.

Solución

En un hexágono $n = 6$, al sustituir en la fórmula se obtiene:



Fórmula

$$d = n - 3$$

Sustitución

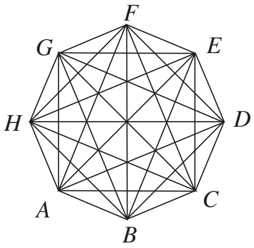
$$d = 6 - 3 = 3$$

Por consiguiente, se pueden trazar 3 diagonales desde un solo vértice.

2 Calcula el número de diagonales totales que se pueden trazar en un octágono.

Solución

En un octágono $n = 8$, por lo que al sustituir en la fórmula se obtiene:



$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

donde

$$D = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Por tanto, en un octágono se pueden trazar 20 diagonales en total.

3 ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 65 diagonales?

Solución

De acuerdo con el problema, $D = 65$; entonces, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, se determina que:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 65 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 130 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 130 = 0$$

$$(n-13)(n+10) = 0$$

$$n - 13 = 0; \qquad n + 10 = 0$$

$$n = 13; \qquad n = -10$$

En consecuencia, el polígono es de 13 lados, esto es, un tridecágono.

EJERCICIO 21

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un solo vértice en un undecágono?
2. Determina el polígono en el que se pueden trazar 17 diagonales desde un solo vértice.
3. Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un decágono.
4. Determina cuál es el polígono en el que se pueden trazar 9 diagonales desde un vértice.
5. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 6 diagonales desde un vértice?
6. Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en cada uno de los siguientes polígonos:

   a) Icoságono — *d*) Hexágono — *g*) Hexadecágono

   b) Dodecágono — *e*) Pentadecágono — *h*) Octadecágono

   c) Nonágono — *f*) Heptágono — *i*) Undecágono
7. ¿En qué polígono se pueden trazar 14 diagonales en total?
8. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 104 diagonales?
9. Determina el polígono en el cual se pueden trazar 119 diagonales en total.
10. Precisa en qué polígono se pueden trazar en total 152 diagonales.
11. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales en total es el doble que su número de lados?
12. ¿En qué polígono el número de lados es la cuarta parte de su número de diagonales en total?
13. Determina el polígono en el cual el número de lados equivale al número de diagonales en total.
14. Precisa el polígono cuyo número de lados es $\frac{1}{5}$ del número de diagonales en total.
15. Determina el polígono en que el número de diagonales en total son los $\frac{9}{2}$ del número de lados.
16. Encuentra el polígono cuyo número de diagonales en total, equivale al número de lados del polígono en el que se pueden trazar 170 diagonales.
17. ¿En cuál polígono el número de diagonales trazadas desde un vértice es $\frac{1}{10}$ del número de diagonales en total?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulos de un polígono

La magnitud de los diferentes ángulos de un polígono se obtiene con las fórmulas siguientes:

Suma de ángulos interiores de cualquier polígono

$$S_i = 180° (n - 2)$$

Ángulo interior de un polígono regular

$$i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Suma de ángulos exteriores de cualquier polígono

$$S_e = 360°$$

Ángulo exterior de un polígono regular

$$e = \frac{360°}{n}$$

Donde n = número de lados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cuatro ángulos interiores de un polígono de 5 lados miden respectivamente: 120°, 90°, 75° y 135°. ¿Cuánto mide el quinto ángulo?

Solución

En un pentágono $n = 5$, entonces la suma de sus ángulos interiores es:

$$S_i = 180° \,(n - 2) \qquad \rightarrow \qquad S_i = 180° \,(5 - 2) = 180° \,(3) = 540°$$

Luego, el quinto ángulo se obtiene así:

$$540° - (120° + 90° + 75° + 135°) = 540° - 420° = 120°$$

Por tanto, el quinto ángulo mide 120°.

2 ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1 440°?

Solución

De acuerdo con el problema $S_i = 1\,440°$, entonces:

$S_i = 180°(n - 2)$ donde

$$180°(n - 2) = 1\,440°$$

$$n - 2 = \frac{1440°}{180°}$$

$$n = 8 + 2 = 10$$

Por consiguiente, el polígono es un decágono.

3 ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 120°?

Solución

En este caso $i = 120°$, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, se obtiene:

$$i = \frac{180°(n-2)}{n} \qquad \rightarrow \qquad 120° = \frac{180°(n-2)}{n} \qquad \rightarrow \qquad 120°\, n = 180°\, n - 360$$

$$360° = 180°\, n - 120°\, n$$

$$360° = 60°\, n$$

$$6 = n$$

Finalmente, resulta que el polígono es un hexágono.

4 ¿En cuál polígono regular el ángulo exterior mide 20°?

Solución

En este caso $e = 20°$, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, resulta que:

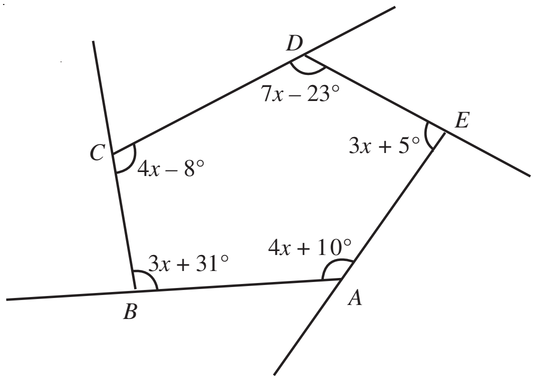
$$e = \frac{360°}{n} \quad \rightarrow \quad 20° = \frac{360°}{n} \quad \rightarrow \quad 20°\,n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{20°}$$

$$n = 18$$

Entonces, el polígono del que se trata es un octadecágono.

5 Determina los ángulos interiores del siguiente polígono:



Solución

En un pentágono la suma de los ángulos interiores es igual a 540°, entonces se calcula el valor de x para encontrar los ángulos:

$$(3x + 31°) + (4x - 8°) + (7x - 23°) + (3x + 5°) + (4x + 10°) = 540°$$
$$21x + 15° = 540°$$
$$21x = 525°$$
$$x = \frac{525°}{21} = 25°$$

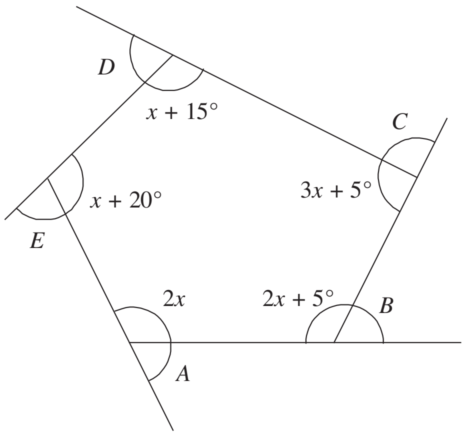
En consecuencia, los valores de los ángulos son:

$$\angle A = 4x + 10° = 4(25) + 10 = 110°$$
$$\angle B = 3x + 31° = 3(25) + 31 = 106°$$
$$\angle C = 4x - 8° = 4(25) - 8 = 92°$$
$$\angle D = 7x - 23° = 7(25) - 23 = 152°$$
$$\angle E = 3x + 5° = 3(25) + 5 = 80°$$

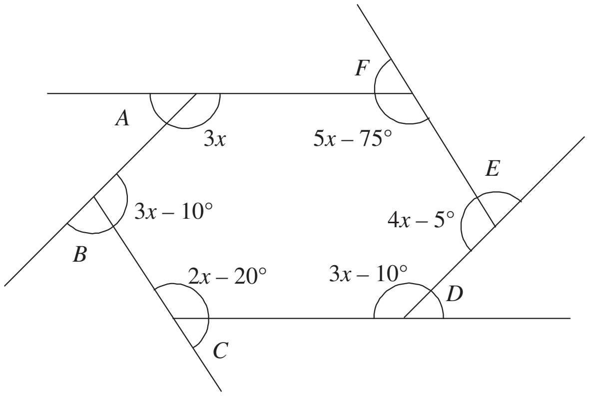
EJERCICIO 22

1. Calcula la medida de un ángulo interior de los siguientes polígonos:
   a) Hexágono
   b) Octágono
   c) Dodecágono
   d) Polígono de 20 lados
   e) Polígono de 18 lados
   f) Polígono de 42 lados
2. Calcula la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos:
   a) Un pentágono
   b) Un decágono
   c) Un pentadecágono
   d) Un octágono
   e) Un tridecágono
   f) Un polígono de 37 lados
3. ¿Cuál es el polígono cuya suma de sus ángulos interiores es 1 260°?
4. Precisa en cuál polígono el total de sus ángulos interiores suma 900°.
5. Determina en cuál polígono la suma de sus ángulos interiores es 2 520°.
6. ¿En cuál polígono el total de sus ángulos interiores suma 1 620°?
7. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 720°?
8. Determina el polígono regular cuyo ángulo interior mide 157.5°.
9. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 140°?
10. Determina en cuál polígono regular el ángulo exterior mide $\frac{\pi}{6}$ *rad*.
11. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular con un ángulo interior de 135°?
12. Determina en cuál polígono regular el ángulo interior mide 60°.
13. Precisa en cuál polígono regular el ángulo exterior es de 60°.
14. Determina el polígono cuyo ángulo interior equivale a $\frac{13}{2}$ de su ángulo exterior.
15. ¿En cuál polígono el ángulo exterior es $\frac{2}{7}$ de su ángulo interior?
16. Determina el polígono en el cual la suma de ángulos interiores equivale a $\frac{15}{2}$ de su ángulo exterior.
17. Calcula el valor de los ángulos interiores de un pentágono si su magnitud es respectivamente: x, $\frac{12}{5}x$, $2.4x$, $2x$ y $2.2x$.
18. Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un pentágono si valen, respectivamente: x, $x - 10°$, $x + 5°$, $x + 25°$ y $x - 30°$.
19. Calcula el valor de los ángulos interiores de un heptágono cuyos valores son: x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $7x$ y $8x$.

20. Encuentra los ángulos exteriores del siguiente polígono:



21. Determina los ángulos exteriores del siguiente polígono:



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diferentes usos DE LA ESCALA

Imagen del libro matemáticas simplificadas en la escala 1:5

Un ejemplo del uso de la escala son las fotografías, en las que podemos reconocer personas, objetos y lugares, ya que guardan semejanza con los reales. Hay fotografías que agrandan miles o millones de veces seres u objetos del mundo real gracias al uso de la tecnología, mientras que en otras, se ven reducidas en varias decenas de veces, la realidad representada.

Los planos de casas, muebles, aparatos u objetos en general también se elaboran a escala, y de su lectura podemos especificar las dimensiones reales que éstos poseen y captar sus formas.

Otro uso importante de las escalas se encuentra en la elaboración de mapas, el cual es la representación convencional de la configuración superficial de la tierra, con una relación de similitud proporcionada, a la que se llama escala.

La tecnología nos auxilia con algunos instrumentos para poder llevar a cabo estas representaciones y que en nuestra vida cotidiana los hemos utilizado seguramente más de una docena de veces; ejemplo de ello son: la cámara digital, la fotocopiadora, la televisión, entre otros.

Escala

Es la razón que existe entre dos cantidades o magnitudes. Las escalas pueden ser numéricas, analíticas y gráficas.

Las escalas numéricas se definen como la razón entre la magnitud dibujada y la longitud real.

$$\frac{LD}{LR} \text{ o } LD:LR$$

Las escalas numéricas pueden ser de ampliación o de reducción.

Ejemplos

Escalas de reducción 1:10, l:100, 1:1000 ...

Escalas de ampliación 10:1, 100:1, 1000:1 ...

Una escala de 1:10 significa que cada unidad dibujada es $\frac{1}{10}$ parte de la unidad real, y una escala de 100:1 representa que una unidad dibujada es 100 veces mayor que la unidad real.

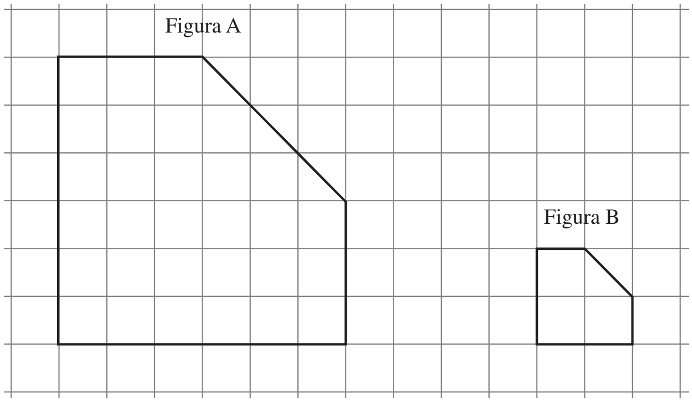
Figuras a escala

Un cuerpo está a escala de otro si tiene la misma forma y sus dimensiones están en la misma razón.

EJEMPLOS

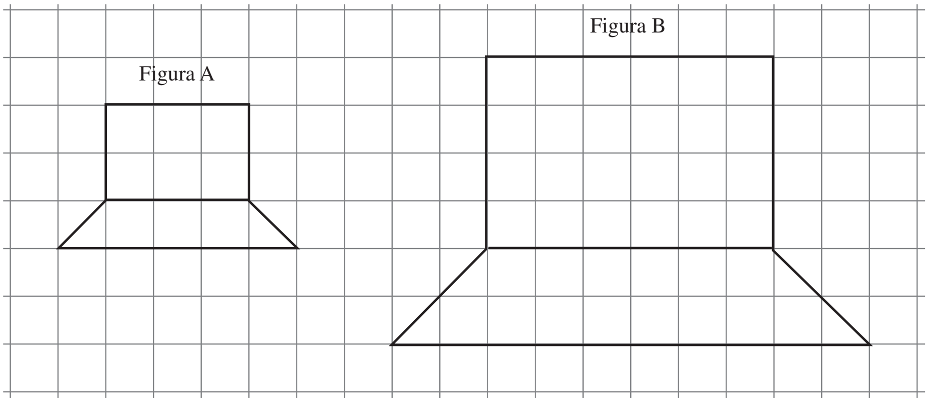
Ejemplos

1



La figura B se encuentra a escala 1:3 de la figura A, esto significa que la longitud de los lados de la figura B son una tercera parte de la longitud de los lados de la figura A.

2

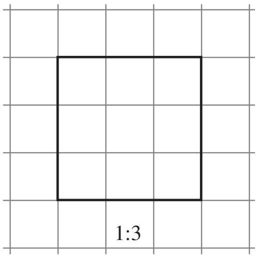


La figura B se encuentra a escala 2:1 con respecto a la figura A, es decir, cada longitud de la figura B es el doble de la figura A.

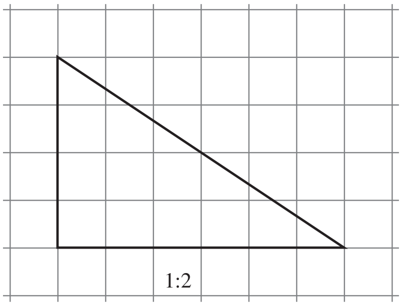
EJERCICIO 23

Reproduce cada una de las figuras en la escala indicada.

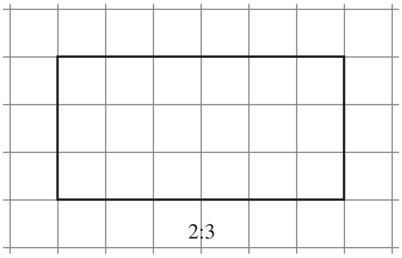
1.



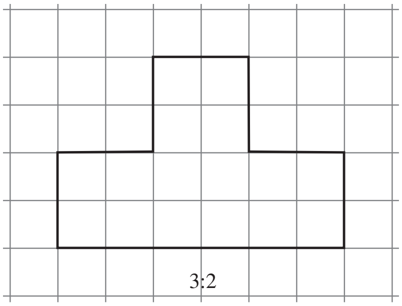
2.



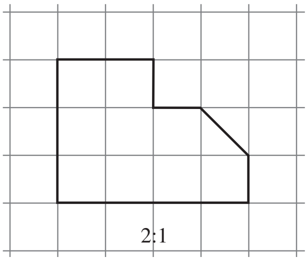
3.



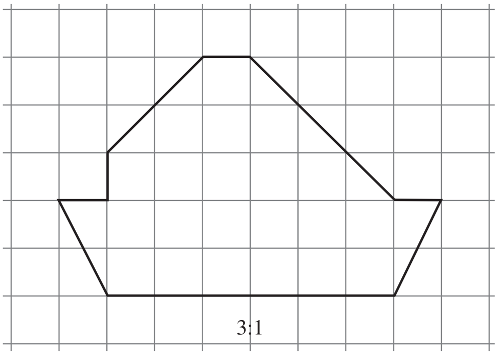
4.



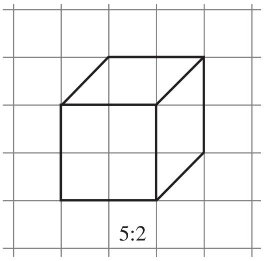
5.



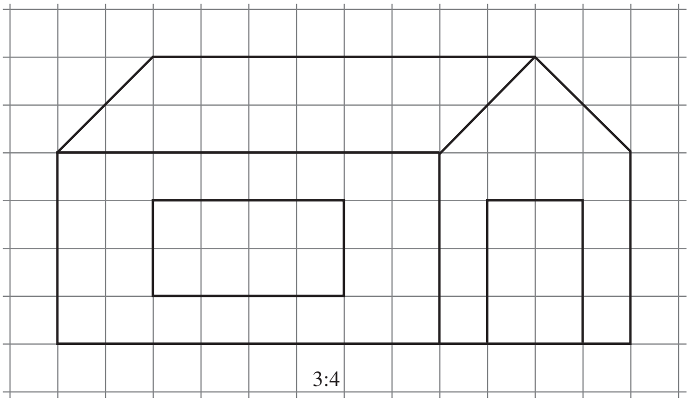
6.



7.



8.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformaciones de figuras en el plano

Cuando a una figura dada se le aplica una transformación, se obtiene otra a la que se llama imagen bajo la transformación.

Traslación

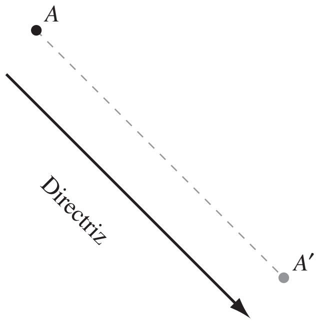
Esta transformación consiste en desplazar cada uno de los puntos de una figura en una misma dirección y la misma distancia.

Para poder realizar la traslación se necesita especificar la dirección y distancia en base a una directriz.

Traslación de un punto. Para trasladar un punto en la dirección de la directriz, se traza un segmento paralelo a la directriz y de la misma longitud, así se obtiene la imagen del punto.

Ejemplos

Traslada los puntos indicados de acuerdo con la directriz:



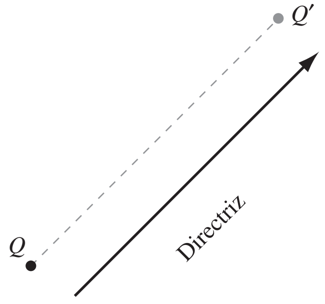


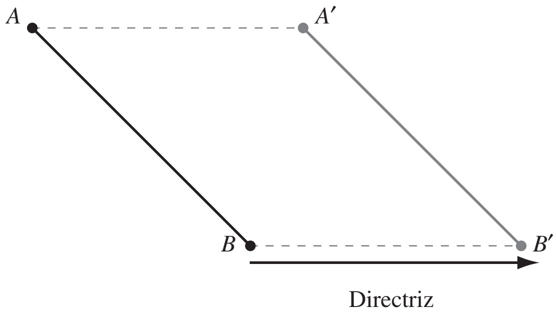
Imagen de $A = A'$

Imagen de $Q = Q'$

Traslación de un segmento. Se determina la imagen de los extremos del segmento en la dirección de la directriz.

Ejemplos

Determina la imagen de los siguientes segmentos:



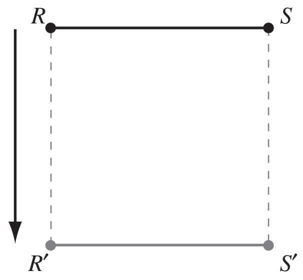


Imagen de $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

Imagen de $\overline{RS} = \overline{R'S'}$

Para realizar los trazos es necesario auxiliarse de las escuadras.

Traslación de una figura. Se traslada cada uno de los lados de la figura para obtener la imagen.

Ejemplos

Encuentra la imagen de las figuras.

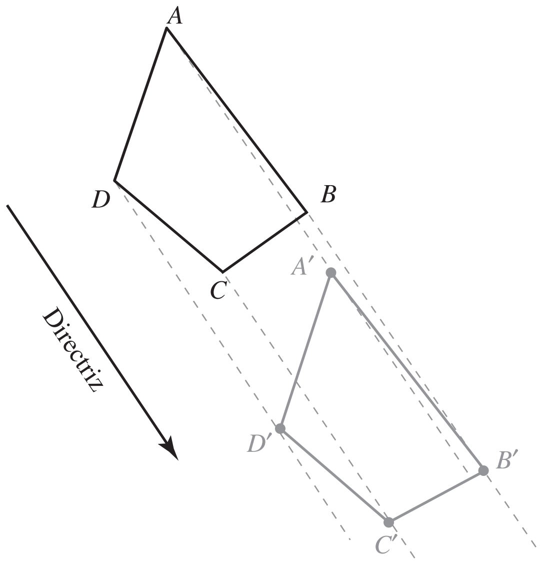


Imagen de $ABCD = A'B'C'D'$

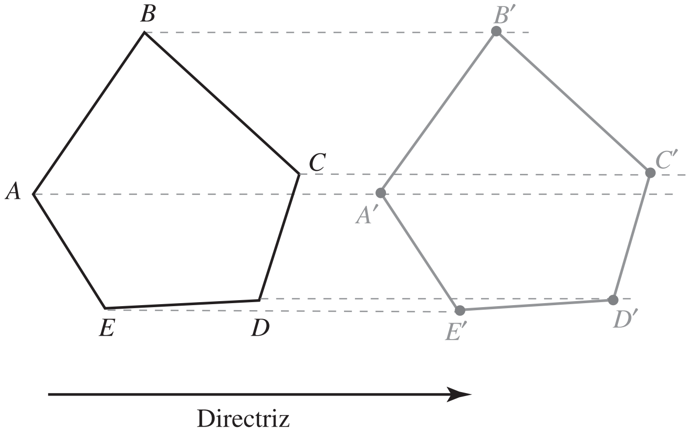
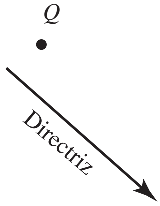


Imagen de $ABCDE = A'B'C'D'E'$

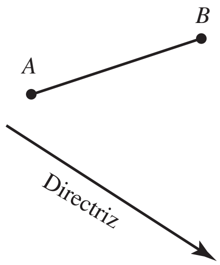
EJERCICIO 24

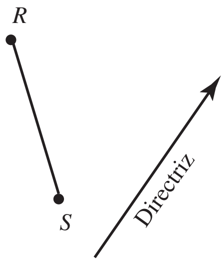
Determina la imagen de los siguientes puntos, segmentos y figuras.

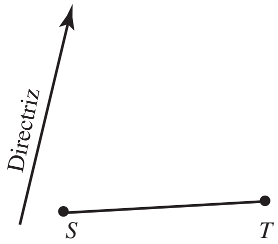
1.


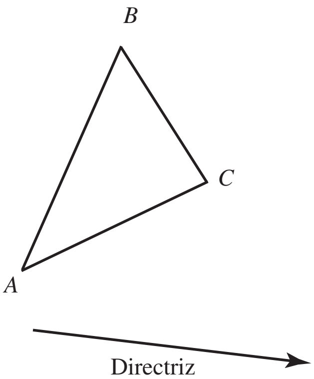
2.

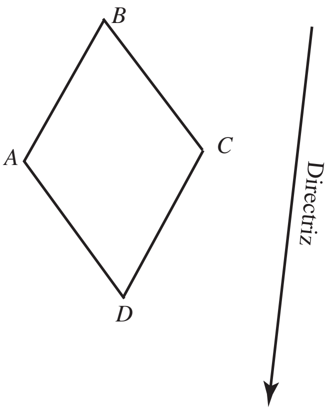
3.

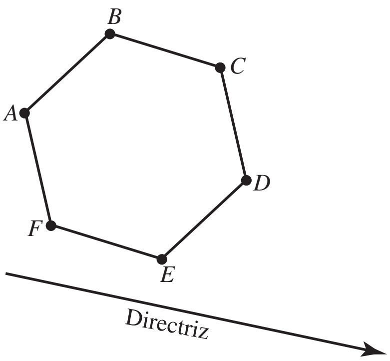
4.


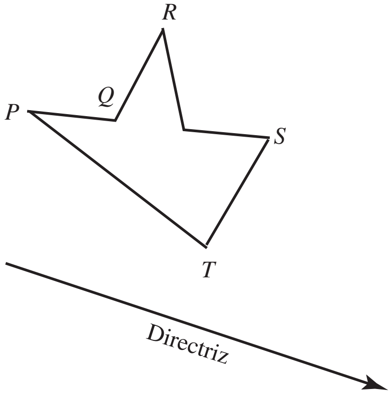
5.


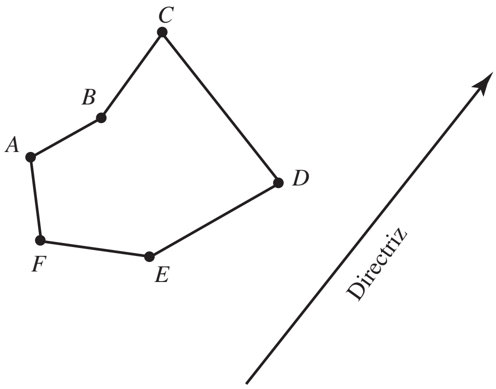
6.


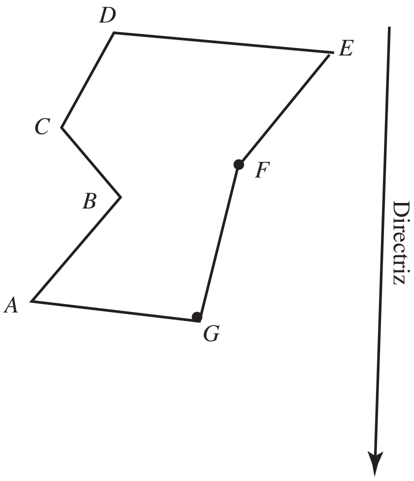
7.


8.


9.


10


11.


12.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Rotación

Esta transformación se realiza alrededor de un punto fijo y con respecto a un ángulo dado. Para realizar una transformación se debe proporcionar el centro de la rotación, el ángulo que se va a rotar la figura y el sentido del giro.

Si el ángulo es positivo, el sentido del giro es opuesto al de las manecillas del reloj, si el ángulo es negativo, el giro es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.

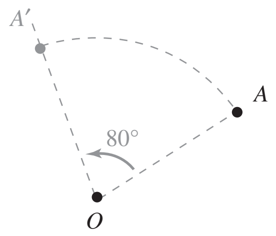
Rotación de un punto. Para obtener la imagen de un punto al rotarlo con respecto a otro punto, se traza un segmento que una ambos puntos, después, con ayuda del compás se hace girar al segmento de acuerdo con la medida del ángulo de rotación.

EJEMPLOS

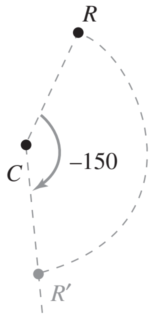
Ejemplos

Rota los siguientes puntos de acuerdo a las indicaciones.

1 Punto A, ángulo de rotación de 80° con respecto al punto O.



2 Punto R, ángulo de –150° con respecto a C.



Rotación de un segmento. Se obtiene rotando los puntos extremos del segmento según lo indique el ángulo de rotación.

EJEMPLOS

Ejemplos

Rota los siguientes segmentos.

1 Segmento $\overline{AB}$, ángulo de 120° con respecto al punto O.

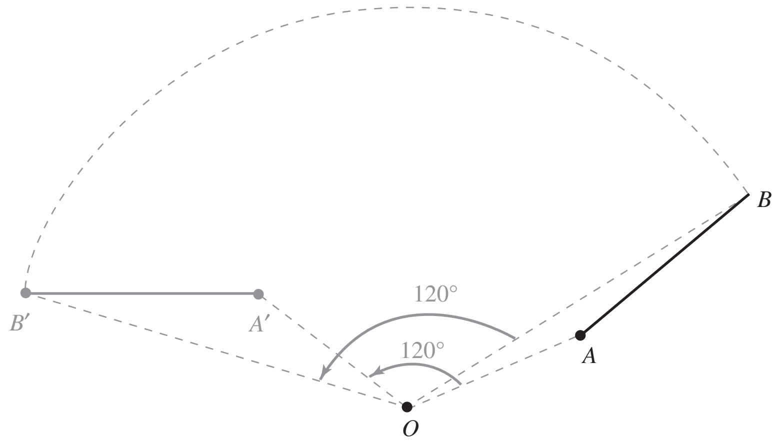


Imagen de $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

2 Segmentos $\overline{RS}$, ángulo de –100° con respecto a C.

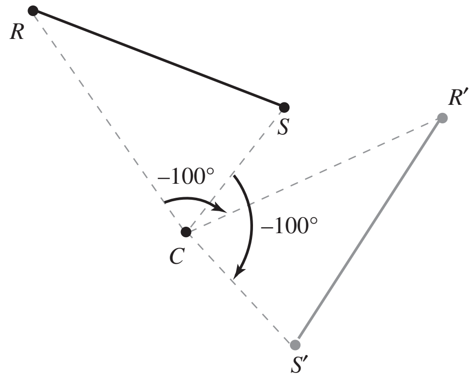


Imagen de $\overline{RS} = \overline{R'S'}$

Rotación de una figura. Se debe realizar la rotación de cada segmento que forma a la figura, para obtener su imagen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Obtén la imagen de cada figura.

1 El triángulo *ABC*, ángulo de 60° con respecto al punto *O*.

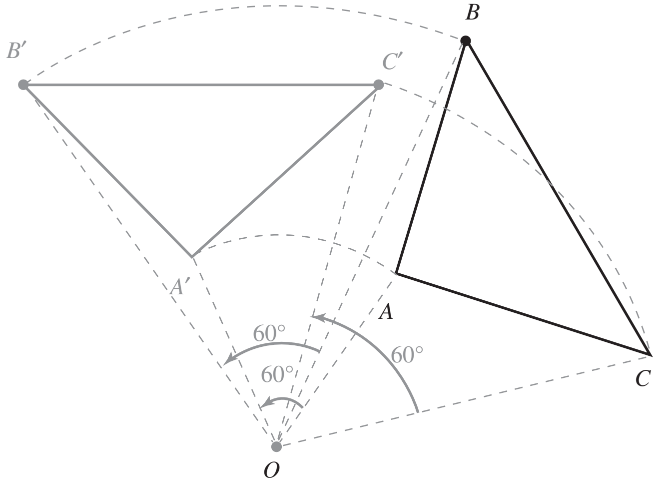


Imagen de $ABC = A'B'C'$

2 El pentágono *ABCDE*, ángulo de –90° con respecto al punto *O*.

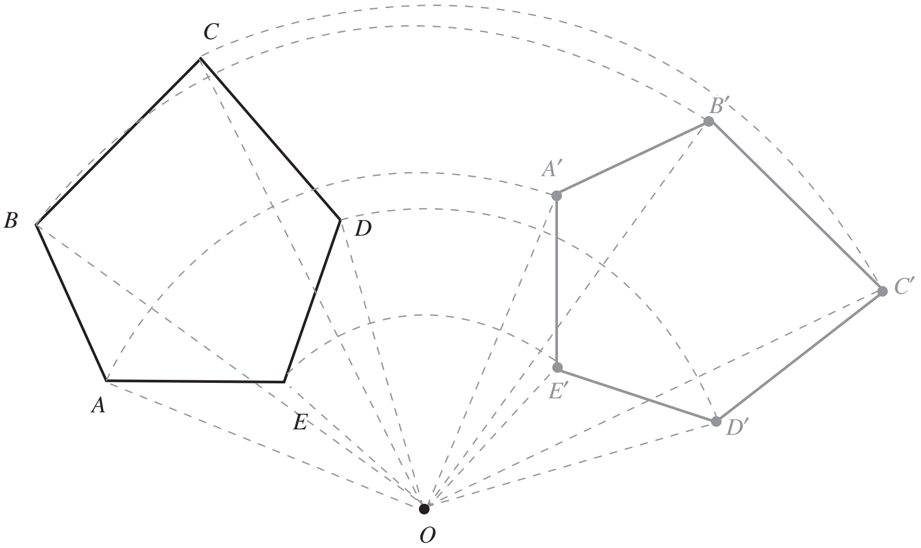
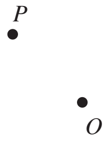


Imagen de $ABCDE = A'B'C'D'E'$

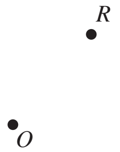
EJERCICIO 25

Determina las imagenes de los puntos, segmentos y figuras al hacerlos rotar.

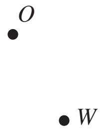
1. Punto P, ángulo de 45° con respecto a O.



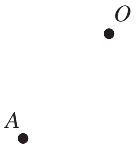
2. Punto R, ángulo de 210° con respecto a O.



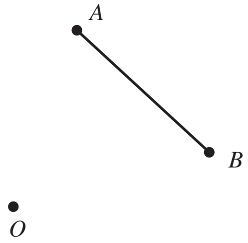
3. Punto W, ángulo de –90° con respecto a O.



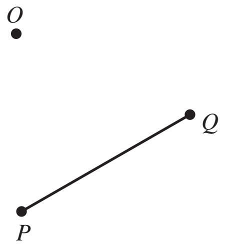
4. Punto A, ángulo de –300° con respecto a O.



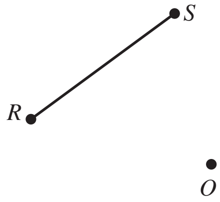
5. Segmento $\overline{AB}$, ángulo de 80° con respecto a O.



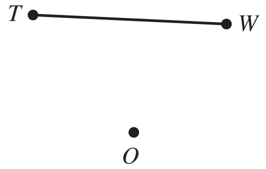
6. Segmento $\overline{PQ}$, ángulo de 225° con respecto a O.



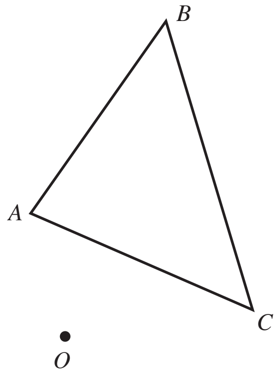
7. Segmento $\overline{RS}$, ángulo de –110° con respecto a O.



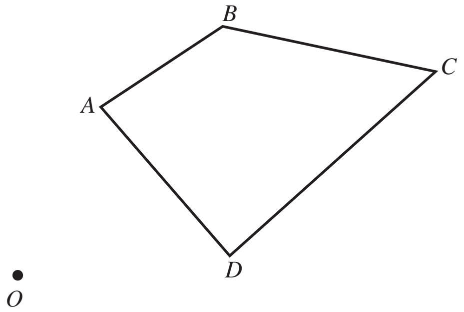
8. Segmento $\overline{TW}$, ángulo de –150° con respecto a O.



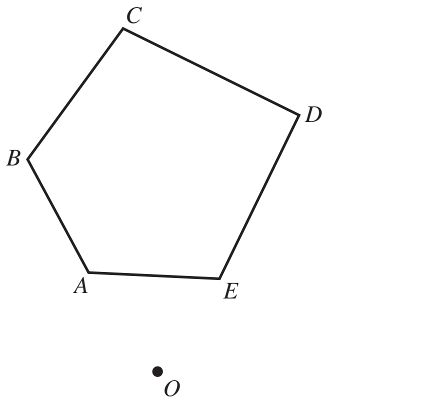
9. Triángulo ABC, ángulo de 45° con respecto a O.



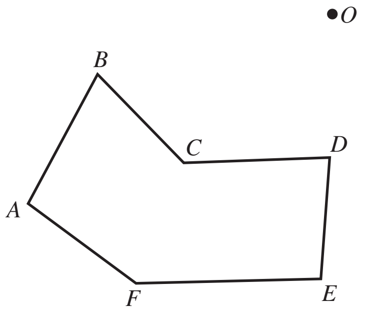
10. Cuadrilátero $ABCD$, ángulo de 120° con respecto a O.



11. Polígono *ABCDE*, ángulo de –270° con respecto a *O*.



12. Polígono *ABCDEF*, ángulo de 240° con respecto a *O*.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simetría axial

En esta transformación se refleja a las figuras del plano sobre una recta conocida como eje de simetría, razón por la cual a la imagen se le conoce como su simétrico.

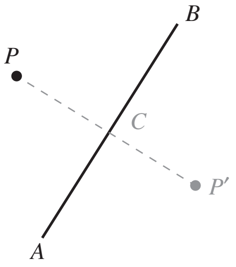
Simétrico de un punto. Conocido un punto y el eje de simetría, la imagen del punto se determina trazando un segmento perpendicular desde el punto hacia el eje de simetría.

La imagen se encuentra del lado opuesto al eje y a la misma distancia que el punto.

EJEMPLOS

Determina los simétricos de los siguientes puntos.

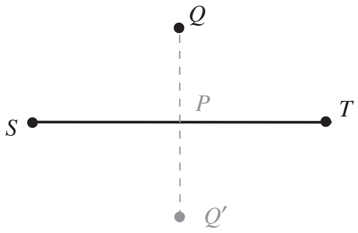
1 Punto *P*, eje de simetría $\overline{AB}$.



$\overline{PC} = \overline{CP'}$

P′ es simétrico de *P*.

2 Punto *Q*, eje de simetría *ST*.



$\overline{PQ} = \overline{PQ'}$

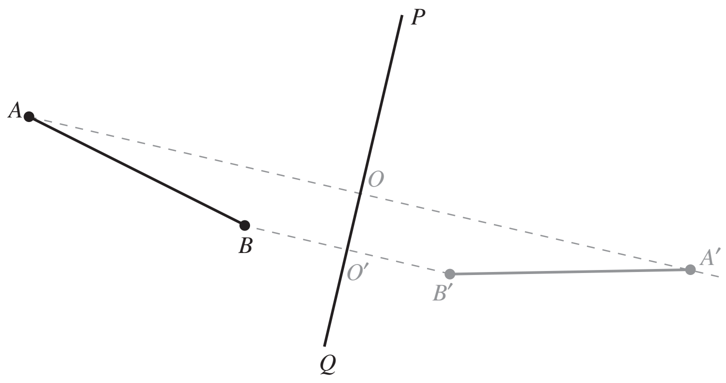
Q′ es simétrico de *Q*.

Simétrico de un segmento. Para obtener la imagen o simétrico del segmento, se determinan los simétricos de los puntos extremos.

EJEMPLOS

Determina los simétricos de cada uno de los segmentos con respecto al eje de simetría indicado.

1 Segmento $\overline{AB}$, eje de simetría $\overline{PQ}$.

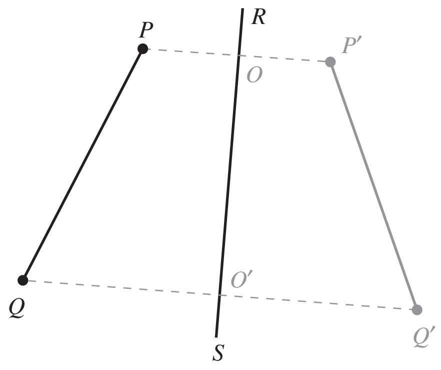


$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$\overline{BO'} = \overline{B'O'}$

$\overline{A'B'}$ es simétrico de $\overline{AB}$

2 Segmento $\overline{PQ}$, eje de simetría $\overline{RS}$.



$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\overline{O'Q} = \overline{O'Q'}$

$P'Q'$ es simétrico de $\overline{PQ}$

Simétrico de una figura. Para determinar la imagen, se determinan los simétricos de cada lado.

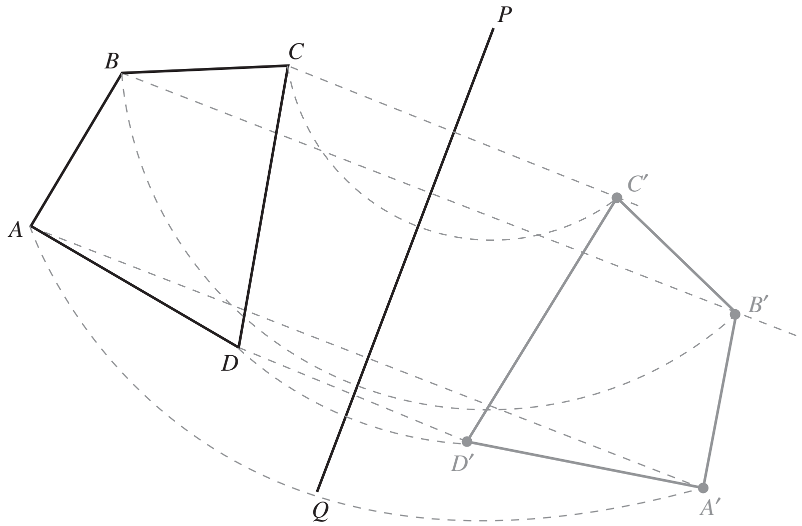
Para determinar el simétrico de los lados de un polígono, se puede emplear el compás como lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

Encuentra los simétricos de los siguientes polígonos.

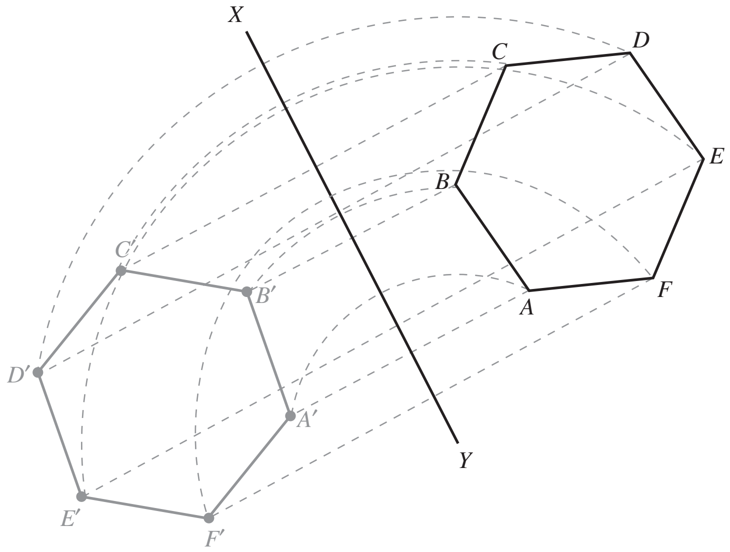
1 El cuadrilátero *ABCD* con respecto al eje de simetría $\overline{PQ}$.



$A'B'C'D'$ es simétrico de *ABCD*

Se trazan los segmentos perpendiculares al eje $\overline{PQ}$, luego se apoya el compás en el punto *P* y se abre a cada uno de los vértices del polígono, se trazan los arcos y en los puntos donde se intersecan con sus respectivos segmentos se ubican las imágenes de los puntos, que posteriormente se unen.

2 El polígono *ABCDEF* con respecto al eje de simetría *XY*.

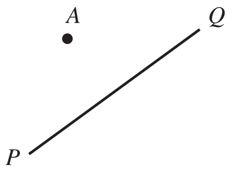


$A'B'C'D'E'F'$ es simétrico de *ABCDEF*

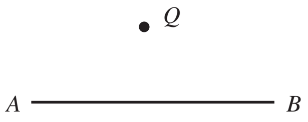
EJERCICIO 26

Obtén el simétrico de los siguientes puntos, segmentos y figuras con respecto al eje de simetría indicado.

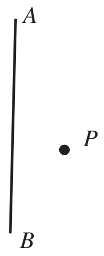
1. Punto A, eje de simetría PQ.



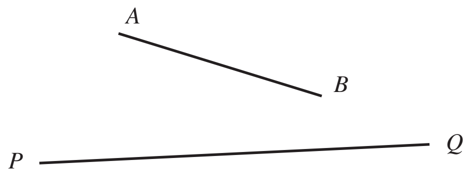
2. Punto Q, eje de simetría AB.



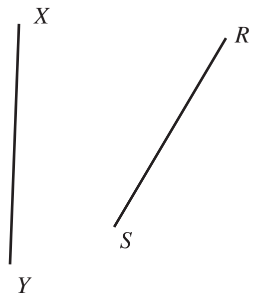
3. Punto P, eje de simetría $\overline{AB}$.



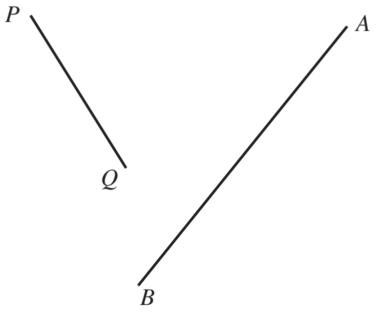
4. Segmento $\overline{AB}$, eje de simetría $\overline{PQ}$.



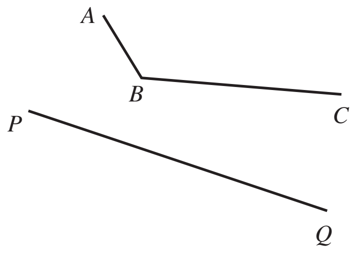
5. Segmento $\overline{RS}$, eje de simetría $\overline{XY}$.



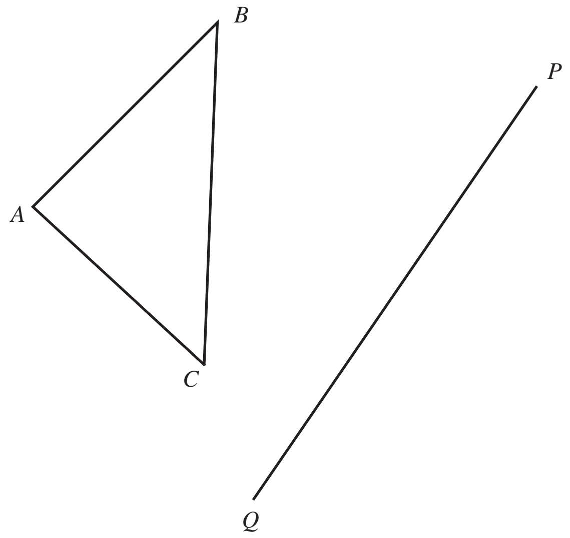
6. Segmento $\overline{PQ}$, eje de simetría $\overline{AB}$.



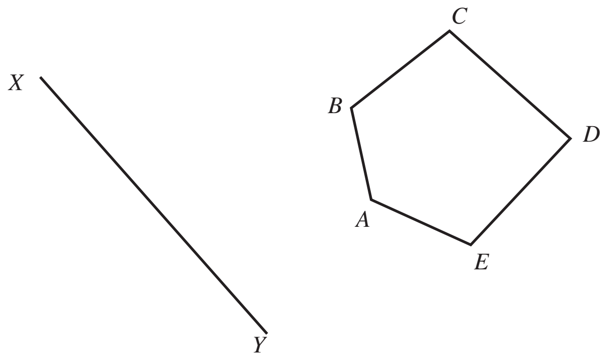
7. Figura ABC, eje de simetría $\overline{PQ}$.



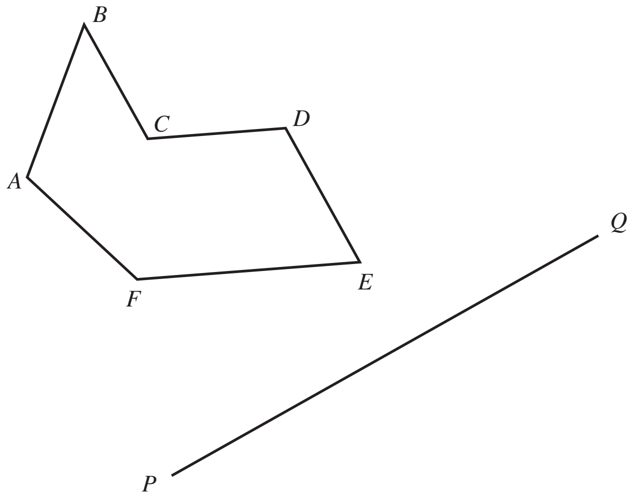
8. Triángulo *ABC*, eje de simetría $\overline{PQ}$.



9. Pentágono *ABCDE*, eje de simetría $\overline{XY}$.



10. Figura *ABCDEF*, eje de simetría $\overline{PQ}$.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simetría central

Este tipo de simetría es con respecto a un punto conocido también como centro. A la imagen de una figura bajo esta transformación se le conoce también como simétrico.

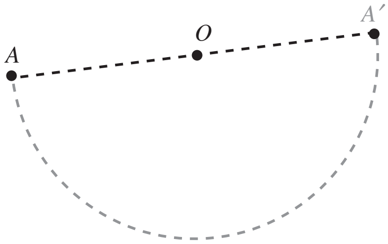
Simétrico con respecto de un punto. Para obtener la imagen de un punto se traza un segmento que pase por el punto y centro. La imagen se ubica al otro lado del punto sobre el segmento y a la misma distancia. Para realizar este procedimiento, se puede utilizar el compás para marcar de manera precisa la distancia; el compás se coloca en el centro y con una abertura igual a la distancia del centro al punto, se traza el arco que corta a la recta en el lado opuesto del punto, éste será la imagen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Encuentra el simétrico de los siguientes puntos.

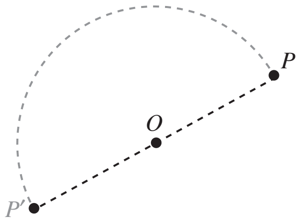
1 Punto A, centro O.



$\overline{AO} = \overline{A'O}$

A' es simétrico de A

2 Punto P, centro O.



$\overline{OP} = \overline{OP'}$

P' es simétrico de P

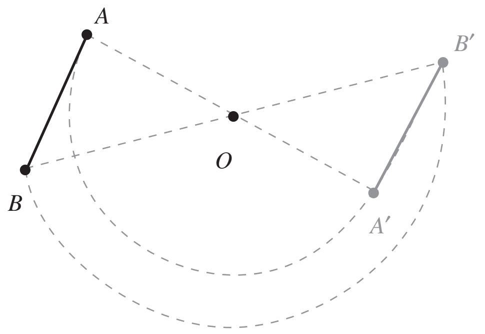
Simétrico de un segmento. Para obtener la imagen o simétrico de un segmento, se trazan los simétricos de sus puntos extremos y se unen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Determina el simétrico de los siguientes segmentos:

1 Segmento $\overline{AB}$ con respecto al centro O.

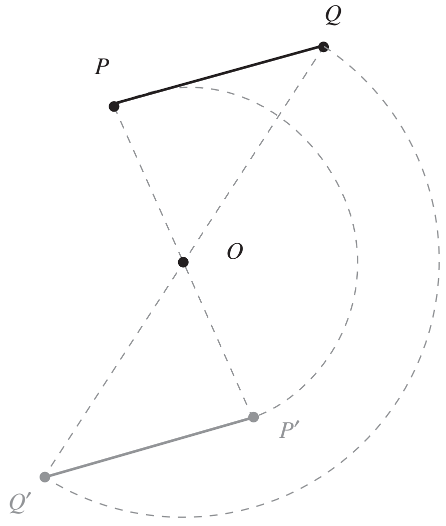


$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$\overline{BO} = \overline{B'O}$

$\overline{A'B'}$ es simétrico de $\overline{AB}$

2 Segmento $\overline{PQ}$ con respecto al centro O.



$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\overline{OQ} = \overline{OQ'}$

$\overline{P'Q'} =$ es simétrico de $\overline{PQ}$

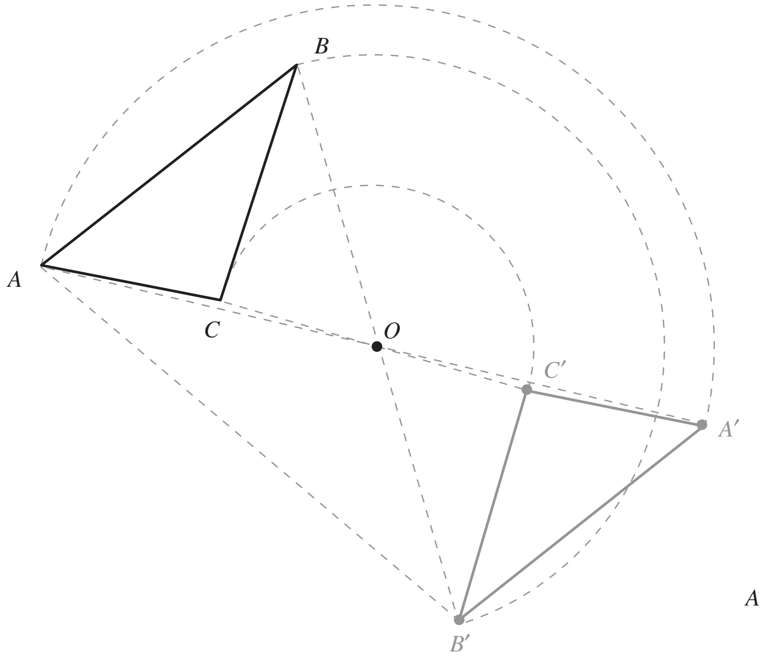
Simétrico de una figura. Se determinan los simétricos de sus vértices.

EJEMPLOS

Ejemplos

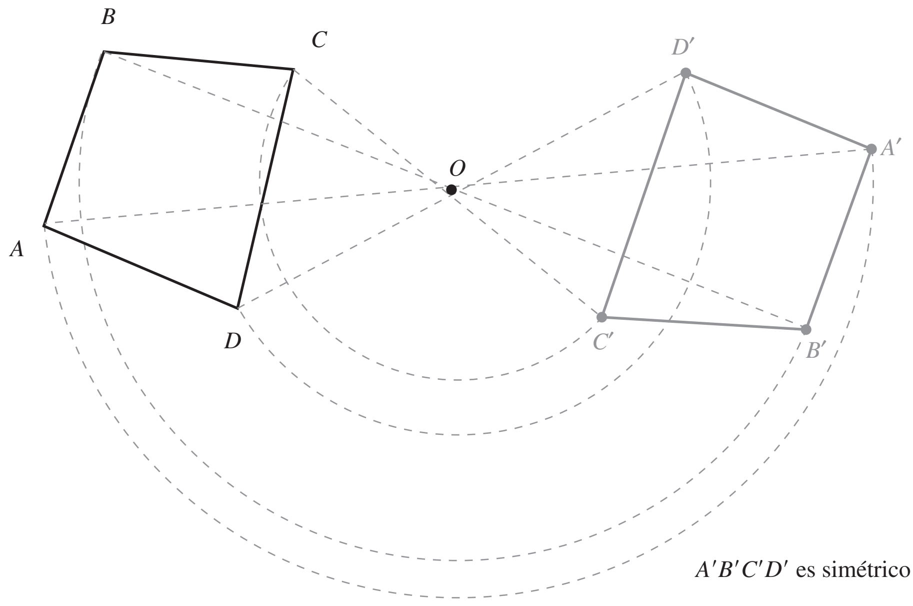
Determina los simétricos de las siguientes figuras.

1 Triángulo ABC con respecto al centro O.



$A'B'C'$ es simétrico de ABC

2 Cuadrilátero $ABCD$ con respecto al centro O.



$A'B'C'D'$ es simétrico de $ABCD$

EJERCICIO 27

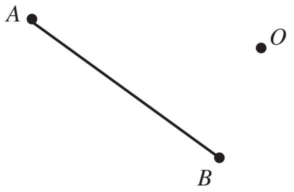
Obtén el simétrico de los siguientes puntos, segmentos y figuras con respecto al centro dado.

1. Punto *W* con respecto al centro *O*.

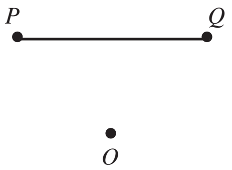
2. Punto *P* con respecto al centro *O*.

3. Punto *A* con respecto al centro *O*.

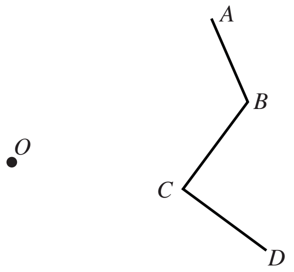
4. Segmento $\overline{AB}$ con respecto al centro *O*.



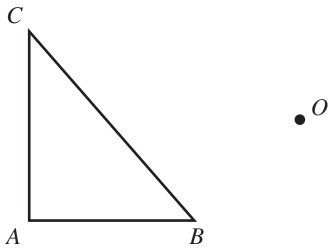
5. Segmento $\overline{PQ}$ con respecto al centro *O*.



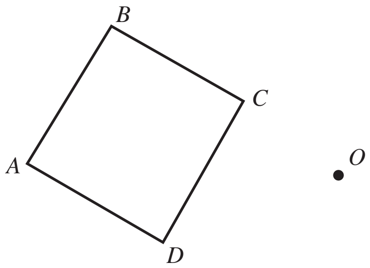
6. Figura *ABCD* con respecto al centro *O*.



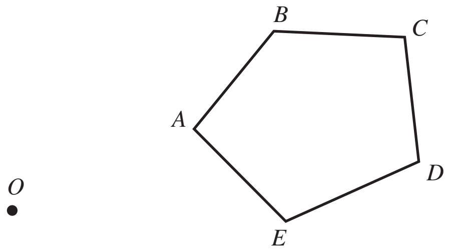
7. Triángulo *ABC* con respecto al centro *O*.



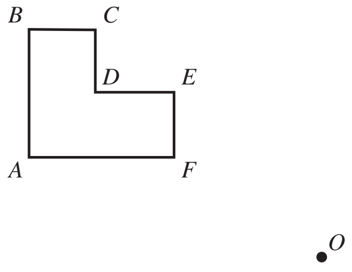
8. Cuadrilátero *ABCD* con respecto al centro *O*.



9. Polígono *ABCDE* con respecto al centro *O*.



10. Polígono *ABCDEF* con respecto al centro *O*.

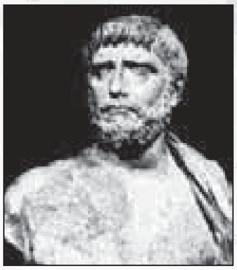


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 8

Circunferencia y círculo

Tales de Mileto



Tales de Mileto
(640 - 560 *a. C.*)

Geómetra griego y uno de los siete sabios de Grecia. Fue el primer matemático griego que inició el desarrollo racional de la geometría. Se le atribuyen 5 teoremas de la geometría elemental:

1. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
2. Un círculo es bisecado por algún diámetro.
3. Los ángulos entre 2 líneas rectas que se cortan son iguales.
4. Dos triángulos son congruentes si ellos tienen 2 ángulos y un lado igual.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Circunferencia

Circunferencia. Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y su longitud representa el perímetro del círculo.

Círculo. Se define como la superficie limitada por una circunferencia.

Arco. Nombre que recibe una parte de la circunferencia y se representa con el símbolo $\frown$

Semicircunferencia. Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

Rectas notables

Radio. Así se nombra al segmento de recta unido por el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.

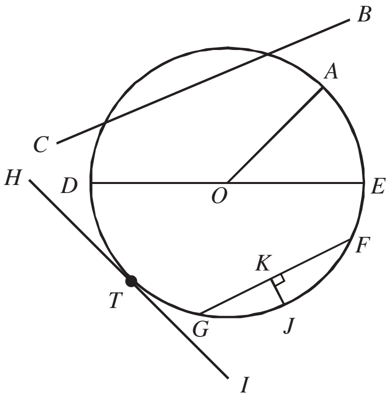
Cuerda. Se denomina así al segmento de recta que une 2 puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.

Diámetro. Se nombra así a la cuerda más grande que une 2 puntos opuestos de la circunferencia y pasa por el centro.

Secante. Aquella recta que pasa por 2 puntos de la circunferencia.

Tangente. Así se llama a la línea recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia.

Flecha o sagita. Es la perpendicular trazada de un punto de la circunferencia al punto medio de una cuerda.

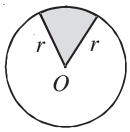


O: Centro
$\overset{\frown}{AE}$: Arco
$\overset{\frown}{ED}$: Semicircunferencia
$\overline{OA}$: Radio
$\overline{DE}$: Diámetro
$\overleftrightarrow{BC}$: Secante
$\overleftrightarrow{HI}$: Tangente
$\overline{FG}$: Cuerda
$\overline{KJ}$: Sagita o flecha
T: Punto de tangencia

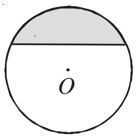
Porciones de un círculo

Son las superficies limitadas por un arco y ciertas rectas notables, las cuales generan:

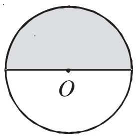
Sector circular. Porción de círculo comprendida entre 2 radios.



Segmento circular. Porción de círculo comprendida entre el arco y su cuerda.

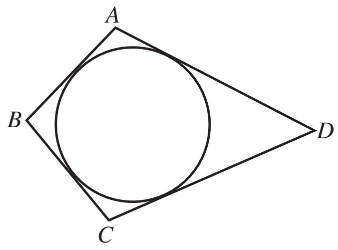


Semicírculo. Porción de círculo entre la semicircunferencia y su diámetro, es decir, es la mitad de un círculo.



Circunferencia y polígonos

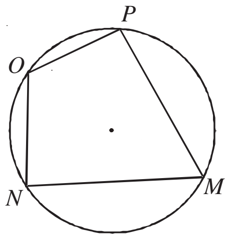
Cuando los lados de un polígono son tangentes a la circunferencia o cuerdas, se genera la circunferencia inscrita o circunscrita.



Circunferencia inscrita. Aquella circunferencia que es tangente a los lados de un polígono.

Polígono circunscrito. Cuando los lados del polígono son tangentes a la circunferencia.

Circunferencia circunscrita. Es la circunferencia que pasa por los vértices de un polígono.



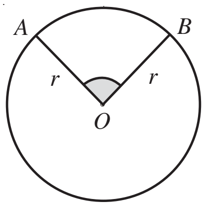
Polígono inscrito. Cuando los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.

Ángulos notables

Son aquellos que forman las rectas notables y se clasifican de la siguiente manera:

Ángulo central. Es aquel ángulo que forman 2 radios, o bien por un diámetro y un radio, y tiene su vértice en el centro.

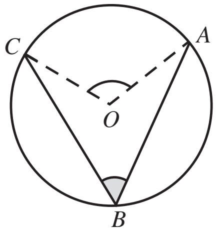
La medida de un ángulo central es igual al arco comprendido entre sus lados.



$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

Ángulo inscrito. Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y lo forma un par de cuerdas.

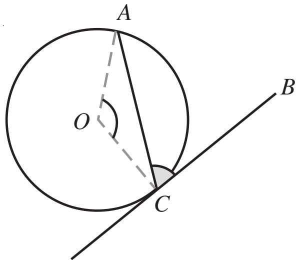
La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.



$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

Ángulo semiinscrito. Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y lo forman una cuerda y una tangente.

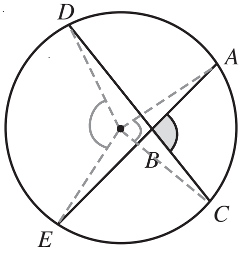
La medida de un ángulo semiinscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.



$$\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

Ángulo interior. Su vértice se encuentra en un punto interior de la circunferencia y lo forman 2 cuerdas que se cortan.

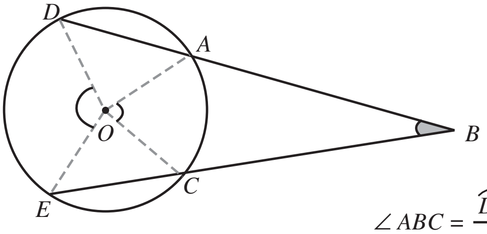
La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.



$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

Ángulo exterior. Tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y lo forman 2 secantes.

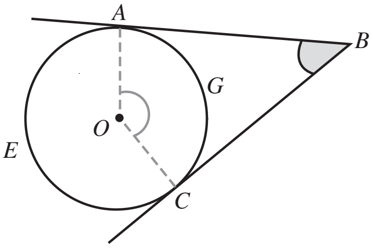
La medida de un ángulo exterior es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{AC}}{2}$$

Ángulo circunscrito. Se denomina así al ángulo que forman 2 tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia.

La medida de un ángulo circunscrito es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



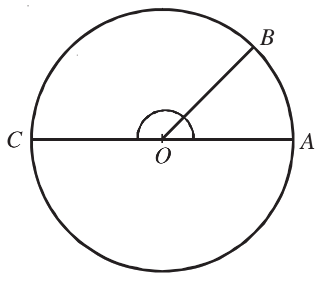
$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AEC} - \overset{\frown}{AGC}}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\widehat{AB} = 35°$, determina los valores de $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

Solución



El ángulo $\angle AOB$ es central, entonces:

$$\angle AOB = \widehat{AB} = 35°$$

De la figura,

$$\angle AOB + \angle BOC = 180°$$

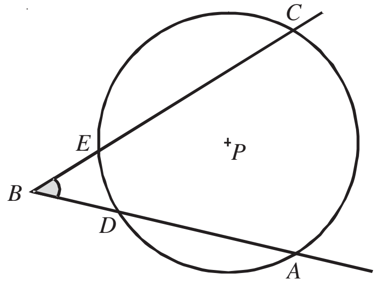
Al despejar $\angle BOC$, se obtiene:

$$\angle BOC = 180° - \angle AOB = 180° - 35° = 145°$$

Por tanto, $\angle AOB = 35°$ y $\angle BOC = 145°$

2 Encuentra el valor del ángulo $\angle ABC$ formado por las secantes, si $\widehat{AC} = 63°$ y $\widehat{DE} = 27°$.

Solución



El ángulo $\angle ABC$ es exterior, entonces:

$$\angle ABC = \frac{\widehat{AC} - \widehat{DE}}{2}$$

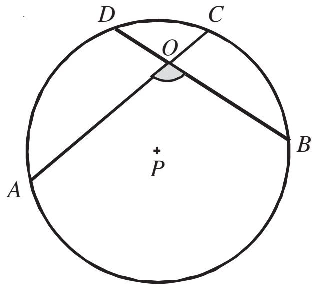
Al sustituir los valores de $\widehat{AC} = 63°$ y $\widehat{DE} = 27°$, se obtiene:

$$\angle ABC = \frac{63° - 27°}{2} = \frac{36°}{2} = 18°$$

Por lo que se deduce que, $\angle ABC = 18°$

3 Determina la medida del ángulo $\angle AOB$ si $\widehat{AB} = 160°$ y $\widehat{CD} = 50°$.

Solución



El ángulo $\angle ABC$ es interior, entonces:

$$\angle AOB = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

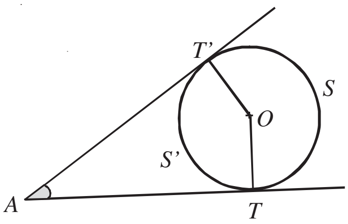
Y al sustituir los valores de $\widehat{AB} = 160°$ y $\widehat{CD} = 50°$, se obtiene:

$$\angle AOB = \frac{160° + 50°}{2} = \frac{210°}{2} = 105°$$

Por consiguiente, $\angle AOB = 105°$.

4 Si $\widehat{TST'} = 240°$, determina el valor del ángulo que forman las rectas tangentes $\overleftrightarrow{AT'}$ y $\overleftrightarrow{AT}$.

Solución



El ángulo $\angle TAT'$ es externo, entonces:

$$\angle TAT' = \frac{\widehat{TST'} - \widehat{TS'T'}}{2}$$

De la figura $\widehat{TST'} + \widehat{TS'T'} = 360°$, donde $\widehat{TS'T'} = 120°$

Al sustituir $\widehat{TST'} = 240°$ y $\widehat{TS'T'} = 120°$, se obtiene:

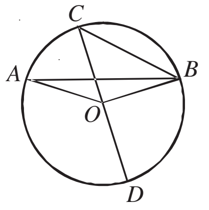
$$\angle TAT' = \frac{240° - 120°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Por consiguiente, $\angle TAT' = 60°$

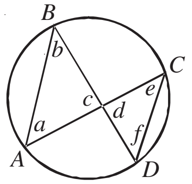
EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

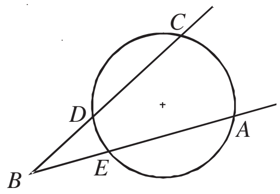
1. En la siguiente figura, $\overset{\frown}{AC} = 60°$, $\overset{\frown}{BC} = 104°$ y $\overset{\frown}{BD} = 80°$. Encuentra los valores de $\angle ABC$, $\angle AOC$, $\angle BOC$ y $\overset{\frown}{AD}$.



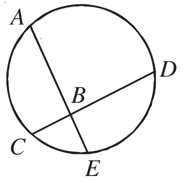
2. En esta figura $\overset{\frown}{AD} = 100°$ y $\overset{\frown}{BC} = 150°$. Determina los valores de $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$ y $\angle f$.



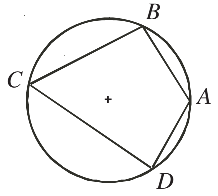
3. En la siguiente figura, $\overset{\frown}{AC} = 70°$ y $\overset{\frown}{DE} = 15°$. Precisa el valor de $\angle ABC$.



4. De esta figura, $\overset{\frown}{DE} = 50°$ y $\overset{\frown}{AC} = 120°$. Encuentra los valores de $\angle ABC$ y $\angle DBA$.



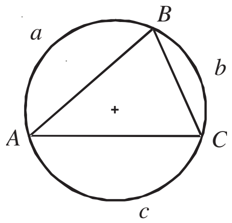
5. Encuentra el valor de los 4 ángulos internos del siguiente cuadrilátero si $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\overset{\frown}{BC} = 110°$, $\overset{\frown}{CD} = 100°$ y $\overset{\frown}{AD} = 90°$.



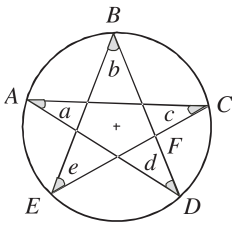
6. Si ΔABC es un triángulo inscrito, como se ilustra, halla:

   a) $\angle A$ si $a = 150º$ y $c = 150º$

   b) $\angle A$ si $AB \perp BC$ y $a = 100º$

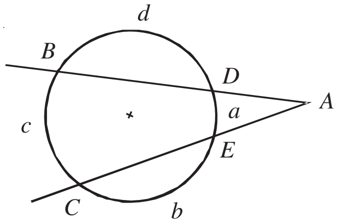


7. Si $\angle e = 50°$, $\angle BFC = 65°$, $\overset{\frown}{CD} = 120°$, $\overset{\frown}{AE} = x$ y $\overset{\frown}{AB} = x + 10°$, encuentra el valor de los ángulos restantes.

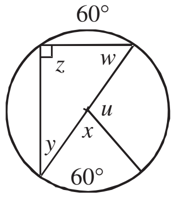


8. En la figura, AB y AC son secantes que se cortan en A, determina:

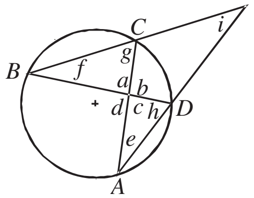
a) $\angle A$ si $c = 90°$, $a = 60°$
b) $\angle A$ si $c - a = 80°$
c) $\angle A$ si $c = a + 60°$
d) a si $c = 135°$, $\angle A = 50°$
e) c si $a = 60°$ y $\angle A = 30°$
f) $c - a$ si $\angle A = 70°$
g) a si $c = 2a$ y $\angle A = 35°$
h) a si $c = 5a$ y $\angle A = 80°$



9. En la siguiente figura halla el valor de $\angle u$, $\angle w$, $\angle x$, $\angle y$ y $\angle z$.



10. Si $\overset{\frown}{AB} = 130°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$, encuentra $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$, $\angle g$, $\angle h$ y $\angle i$.

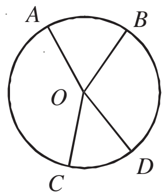


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

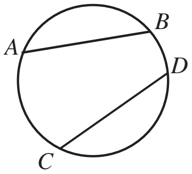
Teorema 1. Si 2 ángulos centrales del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes, entonces sus arcos intersecados son congruentes.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

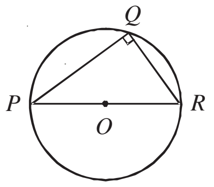


Teorema 2. En una circunferencia de cuerdas iguales se subtienden arcos iguales y viceversa.

$$\text{Si } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ si y sólo si } \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

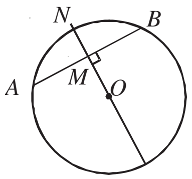


Teorema 3. Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.



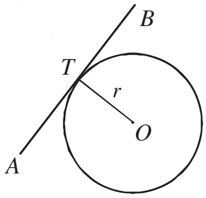
Teorema 4. Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y a su arco.

$$\text{Si } \overleftrightarrow{NO} \perp \overline{AB} \text{ entonces, } \overline{AM} = \overline{MB} \text{ y } \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB}$$



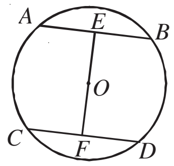
Teorema 5. Una recta tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hacia el punto de tangencia.

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OT}, \overline{OT} = r$$



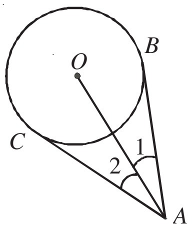
Teorema 6. Dos cuerdas trazadas en un círculo y que equidistan del centro, son congruentes.

$$\text{Si } \overline{OE} = \overline{OF} \text{ entonces } \overline{AB} \cong \overline{CD}$$



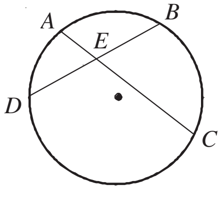
Teorema 7. Las tangentes trazadas desde un punto fuera del círculo son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que pasa por el centro y dicho punto.

$$\overline{AC} \cong \overline{AB} \text{ y } \angle 1 = \angle 2$$



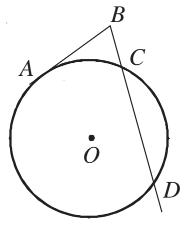
Teorema 8. Si 2 cuerdas se intersecan dentro de un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.

$$\overline{AE} \cdot \overline{EC} = \overline{BE} \cdot \overline{ED}$$



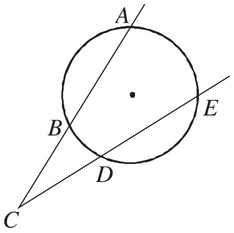
Teorema 9. Si desde un punto exterior a un círculo se traza una tangente y una secante, la medida de la tangente es media proporcional entre la medida de la secante y su segmento externo.

$$(\overline{AB})^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$$



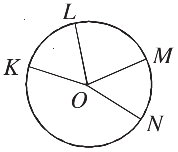
Teorema 10. Si desde un punto exterior a un círculo se trazan 2 secantes, el producto de la medida de una secante por la medida de su segmento exterior es igual al producto de la medida de la otra secante por su segmento exterior.

$$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\overline{EC}\cdot\overline{DC}$$



EJEMPLOS

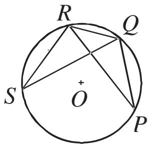
1 Si $\angle KOL \cong \angle MON$, demuestra que arco $KM \cong$ arco LN.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\angle KOL \cong \angle MON$	1. Dato
2. Arco $KL \cong$ arco MN	2. De la figura: $\angle KOL = \overset{\frown}{KL}$ y $\angle MON = \overset{\frown}{MN}$, pero $\angle KOL \cong \angle MON$, por tanto, arco $KL \cong$ arco MN
3. Arco $KM \cong$ arco LN	3. $\overset{\frown}{KM} = \overset{\frown}{KL} + \overset{\frown}{LM}$, $\overset{\frown}{LN} = \overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MN}$, pero $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{KL}$, entonces $\overset{\frown}{KM} \cong \overset{\frown}{LN}$

2 En la siguiente figura $\overline{SR} \cong \overline{QP}$, demuestra que: $\overline{SQ} \cong \overline{RP}$.



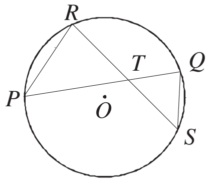
Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{SR} \cong \overline{QP}$	1. Dato
2. $\angle SRP \cong \angle PQS$	2. $\angle SRP = \dfrac{\overset{\frown}{SP}}{2}$, $\angle PQS = \dfrac{\overset{\frown}{SP}}{2}$
3. Arco $SR \cong$ arco QP	3. Cuerdas iguales $(\overline{SR} \cong \overline{QP})$ subtienden arcos iguales $(\overset{\frown}{SR} \cong \overset{\frown}{QP})$
4. $\angle RQS \cong \angle QRP$	4. $\angle RQS = \dfrac{\overset{\frown}{SR}}{2}$, $\angle QRP = \dfrac{\overset{\frown}{QP}}{2}$, pero $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{QP}$, por tanto $\angle RQS \cong \angle QRP$
5. $\angle SRQ \cong \angle RQP$	5. $\angle SRQ = \angle SRP + \angle QRP$ y $\angle RQP = \angle RQS + \angle PQS$, pero $\angle SRP = \angle PQS$ y $\angle RQS = \angle QRP$, por tanto $\angle SRQ \cong \angle RQP$
6. $\overline{RQ} \cong \overline{RQ}$	6. Por ser lado común a los triángulos SRQ y PQR
7. $\Delta SRQ \cong \Delta PQR$	7. Por el teorema lado, ángulo, lado
8. $\overline{RP} \cong \overline{SQ}$	8. Por ser lados homólogos en triángulos congruentes

EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. De la siguiente figura:

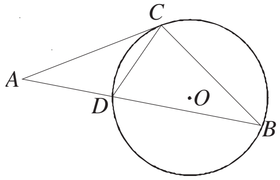


   a) Encuentra $\overline{PT}$ si $\overline{TQ}=5$, $\overline{RT}=9$ y $\overline{TS}=6$

   b) Halla $\overline{TS}$ si $\overline{PT}=11$, $\overline{RT}=7$ y $\overline{TQ}=5$

   c) Determina $\overline{TR}$ si $\overline{PQ}=22$, $\overline{TQ}=5$ y $\overline{TS}=9$

2. De esta figura:



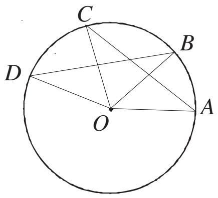
   a) Determina $\overline{AC}$ si $\overline{AD}=6$ y $\overline{BD}=11$

   b) Encuentra $\overline{AB}$ si $\overline{AD}=5$ y $\overline{AC}=9$

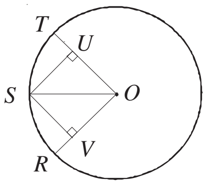
   c) Halla $\overline{AC}$ si $\overline{DB}=10$ y $\overline{AB}=23$

Realiza las siguientes demostraciones.

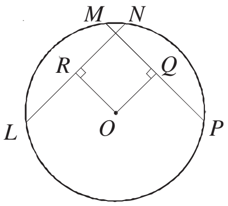
3. Si el $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$, demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



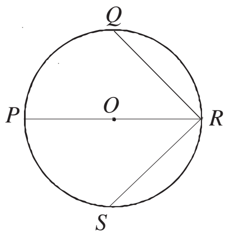
4. Si $\overline{SU} \perp \overline{OT}$, $\overline{SV} \perp \overline{OR}$ y $\overline{SU} \cong \overline{SV}$, comprueba que $\overset{\frown}{TS} \cong \overset{\frown}{SR}$.



5. Si $\overline{RO} \perp \overline{LN}$, $\overline{OQ} \perp \overline{MP}$ y $\overline{LN} \cong \overline{MP}$, demuestra que: $\angle ORQ \cong \angle OQR$.

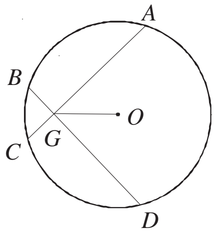


6. Si $\overline{PR}$ es un diámetro y $\angle PRS \cong \angle PRQ$, comprueba que: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.



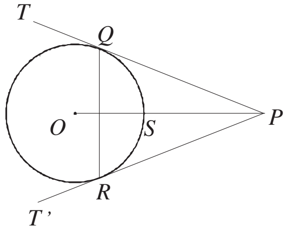
7. Si $\angle OGA \cong \angle OGD$, demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

8. *Si* $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, comprueba que $\angle OGA \cong \angle OGD$.

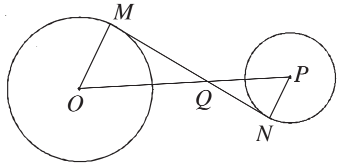


9. *PT* y *PT´* son tangentes al círculo en los puntos *Q* y *R*, respectivamente. Demuestra que $\overline{OP}$ biseca a la cuerda *QR*.

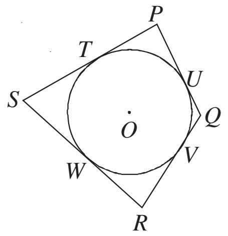
10. *PT* y *PT´* son tangentes al círculo en los puntos *Q* y *R*, respectivamente, y si se unen *Q* y *R*, comprueba que: $\angle PRS \cong \angle PQS$.



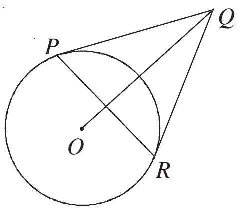
11. Sea $\overline{MN}$ tangente común a las circunferencias con centro en *O* y *P*. Si se unen los centros $\overline{OP}$, interseca a la tangente en *Q*. Demuestra que: $\angle MOQ \cong \angle NPQ$.



12. Comprueba que la suma de las medidas de un par de lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito, es igual a la suma de las medidas del otro par.

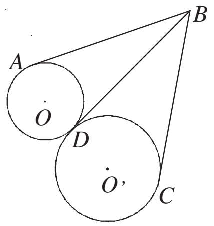


13. $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ son segmentos tangentes a la circunferencia. Demuestra que $\angle QPR \cong \angle QRP$.



14. En la figura $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ son tangentes.

Comprueba que: $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{BC}$.

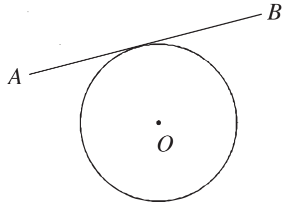


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tangente a una circunferencia

Se le denomina tangente a toda recta que tiene un punto en común con la circunferencia.

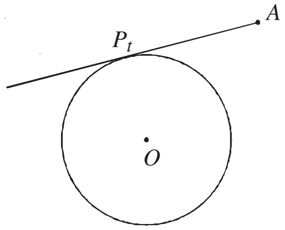
$\overleftrightarrow{AB}$: recta tangente



Longitud de una tangente

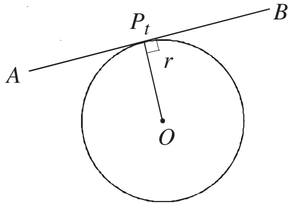
Es el segmento trazado desde un punto exterior al punto de tangencia.

$\overline{AP_t}$: longitud de la tangente

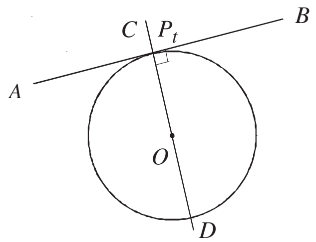


Propiedades de las tangentes

1. Toda tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

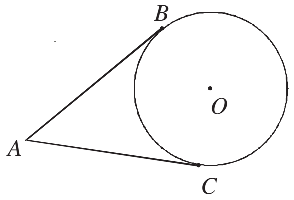


2. Si una recta es perpendicular a una recta tangente en el punto de tangencia, ésta pasa por el centro de la circunferencia.



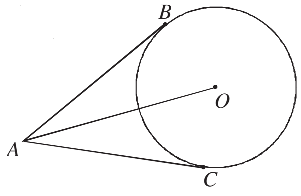
3. Las tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son iguales.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$



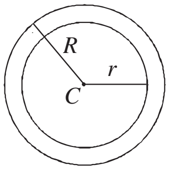
4. La recta que une un punto exterior y el centro de una circunferencia, es bisectriz del ángulo formado por las tangentes trazadas del punto a la circunferencia.

$\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo BAC



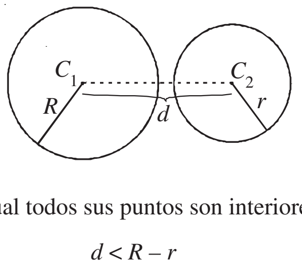
Posiciones relativas

Circunferencias concéntricas. Son aquellas que tienen el mismo centro y distinto radio.



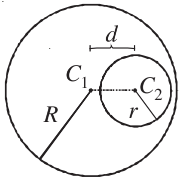
Circunferencias exteriores. Son aquellas que no tienen puntos en común y cada una está en una región exterior a la otra. La distancia entre los centros de estas circunferencias es mayor que la suma de sus radios.

$$d > R + r$$



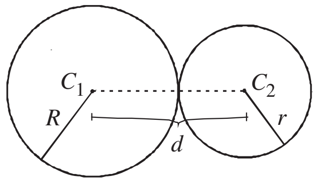
Circunferencia interior. Es aquella en la cual todos sus puntos son interiores a otra circunferencia.

$$d < R - r$$



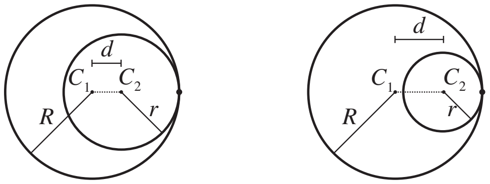
Circunferencias tangentes exteriores. Se les llama así a las que tienen un solo punto en común. La distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios.

$$d = R + r$$



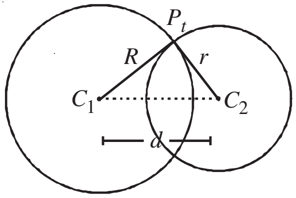
Circunferencias tangentes interiores. Son circunferencias que tienen un solo punto en común. La distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.

$$d = R - r$$



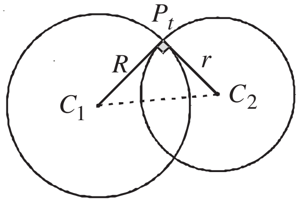
Circunferencias secantes. Son aquellas que se intersecan en 2 puntos. La distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios.

$$d < R + r$$



Circunferencias ortogonales. Cuando se intersecan 2 circunferencias los radios forman un ángulo de 90º, esto significa que son perpendiculares en los puntos de intersección.

$$R \perp r$$



EJEMPLOS

1 Desde un punto exterior se trazó una recta tangente, cuya longitud es de 10 *cm* y el segmento que une dicho punto con el centro de la circunferencia es de 12 *cm*, determina el radio de la circunferencia.

Solución

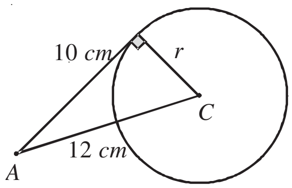
El radio es perpendicular a una recta tangente en el punto de tangencia, esto significa que se forma un triángulo rectángulo, del cual se tiene:

$$(12)^2 = (10)^2 + r^2$$

al despejar r:

$$r = \sqrt{144 - 100}$$

$$r = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$



Luego, el radio de la circunferencia es de $2\sqrt{11}$ *cm.*

2 Los radios de 2 circunferencias son R y r, si las circunferencias son tangentes exteriores, expresa la distancia entre los centros en términos de r, si $r = \frac{2}{3}R$.

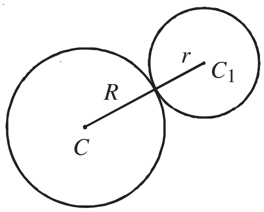
Solución

Por ser circunferencias tangentes exteriores, la distancia entre los centros se define como:

$$d_{CC_1} = R + r$$

al despejar R de $r = \frac{2}{3}R$ y sustituir, se obtiene:

$$d = \frac{3}{2}r + r = \frac{5}{2}r$$



En conclusión, la distancia entre los centros es de $\frac{5}{2}r$.

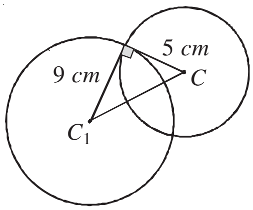
3 Dos circunferencias ortogonales de radio 5 *cm* y 9 *cm*, determina la distancia entre sus centros.

Solución

Si 2 circunferencias son ortogonales, sus radios son perpendiculares, entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{CC_1}\right)^2 = (5)^2 + (9)^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CC_1} = \sqrt{25+81}$$

$$\overline{CC_1} = \sqrt{106}$$



Por consiguiente, la distancia entre los centros es $\sqrt{106}$ *cm.*

EJERCICIO 30

Determina las posiciones de 2 circunferencias, cuyos centros distan 24 u y sus radios miden:

1. $R = 15\ u$, $r = 8\ u$
2. $R = 13\ u$, $r = 11\ u$
3. $R = 42\ u$, $r = 13\ u$
4. $R = 28\ u$, $r = 20\ u$
5. $R = 35\ u$, $r = 11\ u$
6. $R = 20\ u$, $r = 4\ u$

Resuelve los siguientes problemas:

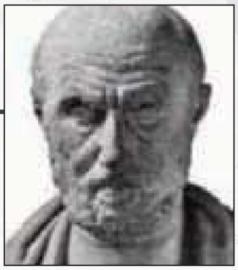
7. Se tienen 3 circunferencias tangentes entre sí de radio r, determina el perímetro del triángulo formado por los puntos de tangencia de las circunferencias.
8. Desde un punto exterior A se traza una recta tangente a la circunferencia de diámetro $4\sqrt{3}\,u$, si la longitud del segmento que une el centro de la circunferencia con el punto A mide 4 u, ¿cuál es la longitud de la tangente?
9. La distancia entre los centros de 2 circunferencias secantes es $2\sqrt{5}\ u$, determina el radio de C_1 si el radio de C_2 es $2\sqrt{2}\ u$.
10. De un punto A se traza una recta tangente a la circunferencia con centro en C_1, la longitud de la tangente es $\sqrt{3}\ cm$ y el segmento $\overline{AC_1} = 2\sqrt{7}\ cm$, determina el radio de la circunferencia.
11. La circunferencia C_2 es tangente interior a C_1 en P, la circunferencia C_3 es tangente interior a C_2 en P, determina las distancias de los centros de C_1 a C_2 y de C_1 a C_3 y si los diámetros de C_1, C_2 y C_3 son: R, $\frac{2}{3}R$ y $\frac{2}{9}R$, respectivamente.
12. Se tienen 3 circunferencias con centros en C_1, C_2 y C_3 de manera que $\overline{C_1C_2} \perp \overline{C_2C_3}$, determina el radio de la circunferencia en C_2 si el radio de la circunferencia en C_1 y en C_3 son: $\frac{1}{4}r$ y $\frac{1}{2}r$, respectivamente y $\overline{C_1C_3} = \frac{\sqrt{61}}{4}r$.
13. Se tienen 3 circunferencias que son tangentes entre sí. El radio de la circunferencia C_1 y C_2 es R, mientras que el de la circunferencia C_3 es $\frac{1}{2}R$, determina la distancia entre el centro de C_3 y el punto de tangencia entre C_1 y C_2.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 9

Perímetros y superficies

Hipócrates de Quios



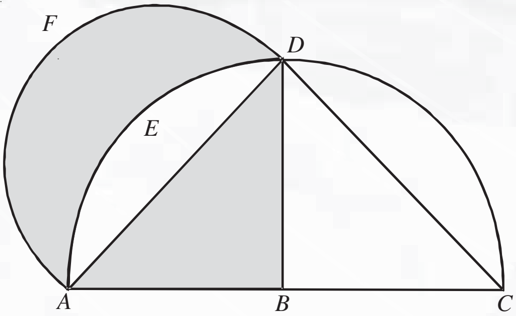
Matemático griego, precursor de Euclides. Entre los mayores logros de Hipócrates está el haber demostrado que las áreas de 2 círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Esto es equivalente a haber descubierto que el área de un círculo es πr^2, sin determinar el valor de π. Es posible que llegara a esta conclusión al considerar al círculo como el límite de un polígono regular.

Uno de los problemas más importantes para los griegos era el de la cuadratura del círculo o de cualquier figura en general, la cual se define así:

La cuadratura de una figura plana es la construcción con regla y compás de un cuadrado con la misma superficie que la figura plana original.

En esa época sólo se habían realizado las cuadraturas de diversas figuras planas de lados rectos, sin embargo Hipócrates fue el primero en cuadrar una figura con lados curvados conocidos como lúnulas.

Logró trazar una lúnula de área igual al triángulo que es mitad de un cuadrado dado.



Área de la lúnula *AEDF* = Área del triángulo *ADB*

Definiciones

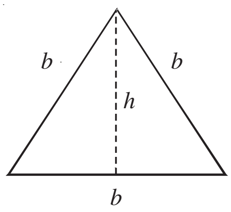
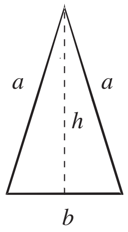
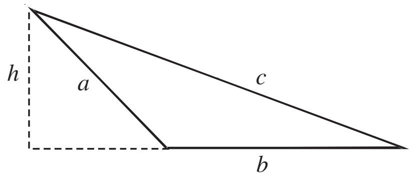
Perímetro. Es la suma de los lados de un polígono.

Superficie o área. Es la región del plano limitada por una figura en dos dimensiones.

Perímetro y área de una figura plana

Las siguientes fórmulas se emplean para determinar el perímetro y el área de una figura.

Triángulos

Equilátero	**Isósceles**	**Escaleno**
		
Perímetro: $P = 3b$	Perímetro: $P = 2a + b$	Perímetro: $P = a + b + c$
Área: $A = \frac{bh}{2}$	Área: $A = \frac{bh}{2}$	Área: $A = \frac{bh}{2}$

Área de un triángulo en función de sus lados (fórmula de Herón de Alejandría).

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Con $s = \frac{a+b+c}{2}$, donde:

s = semiperímetro, a, b, c = lados del triángulo y h = altura

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área del triángulo cuya base y altura son 6 y 4 cm, respectivamente.

Solución

Se sustituyen los valores en la fórmula y se obtiene:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(6\ cm)(4\ cm)}{2} = \frac{24\ cm^2}{2} = 12\ cm^2$$

Por tanto, el área del triángulo es de 12 cm^2

2 Determina el perímetro y el área de un triángulo isósceles, si los lados miden 3, 3 y 5 cm.

Solución

El perímetro se define como la suma de los lados, entonces:

$$P = 3 + 3 + 5 = 11\ cm$$

Para hallar el área se aplica la fórmula de Herón de Alejandría:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

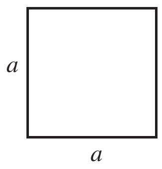
Si $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3+3+5}{2} = \dfrac{11}{2}$, al sustituir en la fórmula:

$$A = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-5\right)} = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{11\cdot 25}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{11}\ cm^2$$

Por tanto, el área del triángulo es $\dfrac{5}{4}\sqrt{11}\ cm^2$

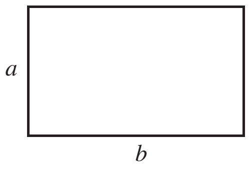
Cuadriláteros

Cuadrado



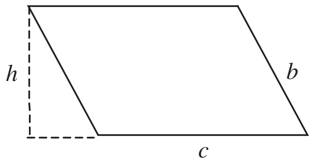
Perímetro: $P = 4a$
Área: $A = a^2$

Rectángulo



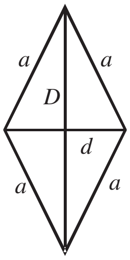
Perímetro: $P = 2\ (a + b)$
Área: $A = ab$

Paralelogramo



Perímetro: $P = 2\ (b + c)$
Área: $A = hc$

Rombo



Perímetro: $P = 4a$

Área: $A = \dfrac{Dd}{2}$

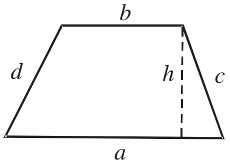
Donde:

d = Diagonal menor

D = Diagonal mayor

a = Lado del rombo

Trapecio



Perímetro:

$$P = a + b + c + d$$

Área:

$$A = \frac{(a+b)\ h}{2}$$

Donde:

a, b, c, d = Lados del trapecio

a = Base mayor

b = Base menor

h = Altura

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el perímetro y el área de un rectángulo de lados 4 y 2 *cm*, respectivamente.

Solución

Al sustituir los valores respectivos en las fórmulas del rectángulo, se obtiene:

Perímetro

$$P = 2a + 2b = 2(2\ cm) + 2(4\ cm) = 4\ cm + 8\ cm = 12\ cm$$

Área

$$A = ab = (2\ cm)\ (4\ cm) = 8\ cm^2$$

2 Encuentra el área de un paralelogramo que mide 6 *cm* de base y 2.5 *cm* de altura.

Solución

Se sustituyen los valores de $c = 6\ cm$ y $h = 2.5\ cm$, entonces:

Área

$$A = ch = (6\ cm)(2.5\ cm) = 15\ cm^2$$

3 Encuentra el área de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 8 *cm*.

Solución

Al sustituir en el área de un rombo en término de sus diagonales se determina que:

$$A = \frac{Dd}{2} = \frac{(12)(8)}{2} = \frac{96}{2} = 48\ cm^2$$

En consecuencia, el área del rombo mide: $48\ cm^2$

4 El perímetro de un trapecio isósceles es de 32 *cm*, si los lados iguales miden 5 *cm* y la altura 3 *cm*, determina su área.

Solución

Sea a la base mayor y b la menor, P el perímetro y c la longitud de los lados iguales del trapecio, entonces:

$$P = a + b + 2c$$

Al despejar $a + b$, se tiene:

$$a + b = P - 2c \qquad a + b = 32 - 2(5) = 32 - 10 = 22$$

Luego, el área de un trapecio se define como:

$$\text{A} = \frac{(a+b)h}{2}$$

Al sustituir $a + b = 22$ y $h = 3$, resulta que:

$$\text{A} = \frac{(22)(3)}{2} = \frac{66}{2} = 33\ cm^2$$

Por consiguiente, el área del trapecio es: $33\ cm^2$

Polígonos regulares

Perímetro. El perímetro se define como el producto del número de lados por la medida de cada lado del polígono.

Área. Es el semiproducto del perímetro por la apotema.

Apotema. Es la longitud del segmento que une el centro del polígono y el punto medio de uno de los lados.

Perímetro: $P = nb$

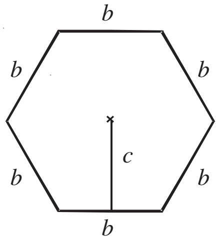
Área: $A = \dfrac{Pc}{2}$

Donde:

n = Número de lados del polígono

b = Lado del polígono

c = Apotema



EJEMPLOS

1 Determina el perímetro y el área de un pentágono regular de lado 4 *cm* y apotema 2.7 *cm*.

Solución

En un pentágono el número de lados es 5, entonces el perímetro es:

$$P = 5(4) = 20\ cm$$

Para hallar el área se aplica la fórmula:

$$A = \frac{Pc}{2} = \frac{(20)(2.7)}{2} = \frac{54}{2} = 27\ cm^2$$

Por tanto, el perímetro y el área son: 20 *cm* y 27 cm^2, respectivamente.

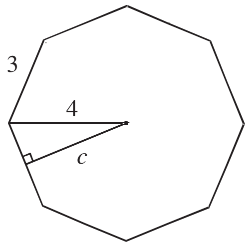
2 Determina el área de un octágono regular, si uno de sus lados mide 3 *cm* y el segmento que une un vértice con el centro del octágono mide 4 *cm*.

Solución

La apotema c es el segmento perpendicular a uno de los lados en su punto medio, esto genera un triángulo rectángulo, en consecuencia:

$(4)^2 = (1.5)^2 + c^2 \qquad 16 = 2.25 + c^2 \qquad c = \sqrt{13.75}$

$c = 3.7$



Luego, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{8(3)(3.7)}{2} = \frac{88.8}{2} = 44.4\ cm^2$$

Por consiguiente, el área mide 44.4 cm^2

Circunferencia y círculo

Longitud de la circunferencia. Es el perímetro de un círculo y se define como el doble producto de su radio por π o el producto del diámetro por π.

Cálculo del círculo. Es el área o superficie limitada por la circunferencia y se denomina como el producto de π por el radio al cuadrado.

Perímetro

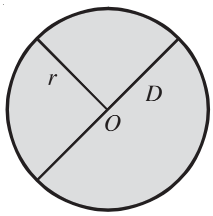
$P = 2\pi\, r = D\pi$

Área

$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$

Donde:

r = Radio, D = Diámetro y $\pi = 3.14159\ldots$



Sector y segmento circular

Perímetro de un sector circular. Se nombra así a la suma de los radios y el arco que subtienden.

Área de un sector circular. Se define como el producto del área del círculo por la fracción $\frac{n}{360^\circ}$, donde n es el ángulo que forman los radios del sector circular.

Perímetro

$P = a + 2r$

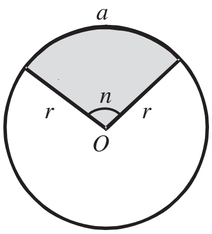
Donde:

r = Radio, n = Grados sexagesimales

a = Longitud de arco $\left(\frac{\pi n r}{180^\circ}\right)$

Área

$A = \frac{\pi r^2 n}{360^\circ} = \frac{ar}{2}$



Perímetro de un segmento circular. Se denomina así a la suma de la cuerda y el arco que subtienden los radios.

Área de un segmento circular. Es igual a la diferencia del sector circular correspondiente, menos el área del triángulo que forman los radios y la cuerda que subtienden.

Perímetro

$P = a + m$

Donde:

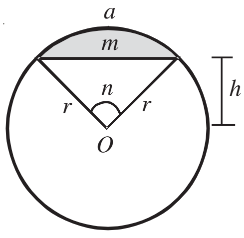
r = Radio, n = Grados sexagesimales

m = Cuerda, h = Altura del triángulo

$a = \text{Arco} = \frac{2\pi r n}{360^\circ}$

Área

$A = \frac{\pi r^2 n}{360^\circ} - \frac{mh}{2}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de la circunferencia, cuyo diámetro mide 4 *cm*.

Solución

La longitud se define como: $P = 2\pi\, r = \pi\, D$, sustituyendo $D = 4\ cm$, se obtiene:

$$P = \pi\,(4\ cm) = 4\,\pi\ cm.$$

2 Encuentra el área del círculo de radio $r = 12\ cm$.

Solución

El área de un círculo está dada por: $A = \pi\, r^2$, se sustituye $r = 12$ y se obtiene:

$$A = \pi\, r^2 = (\pi)\,(12\ cm)^2 = 144\pi\ cm^2$$

Este resultado está en términos de π; sin embargo, se puede sustituir su valor y el resultado será equivalente:

$$A = 144(3.1415)\ cm^2 = 452.37\ cm^2$$

3 Determina el área del sector circular que forman 2 radios si el ángulo que forman es de 60° y miden 4 *cm*.

Solución

En este caso $n = 60°$ y $r = 4\ cm$, al sustituir en la fórmula del sector circular resulta que:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{\pi(4)^2(60°)}{360°} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3} cm^2$$

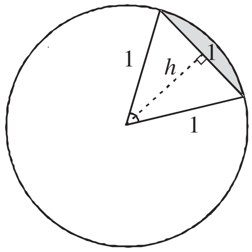
En consecuencia, el área del sector circular es $\frac{8\pi}{3}\ cm^2$

4 Encuentra el área del segmento circular formado por el arco y la cuerda subtendidos por 2 radios con longitud de 1 *cm*, si la cuerda también mide 1 *cm*.

Solución

De acuerdo con la figura, se forma un triángulo equilátero, esto significa que el ángulo formado por los radios mide 60°, luego, la altura del triángulo es:

$$h = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



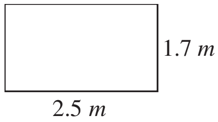
Ahora el área del segmento circular resulta así:

$$A = \frac{\pi(1)^2\, 60°}{360°} - \frac{1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$$

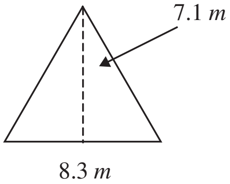
EJERCICIO 31

Calcula el perímetro y la superficie de las siguientes figuras:

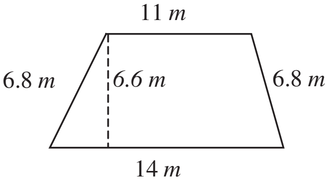
1. Rectángulo



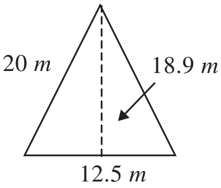
2. Triángulo equilátero



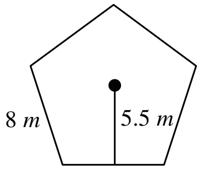
3. Trapecio isósceles



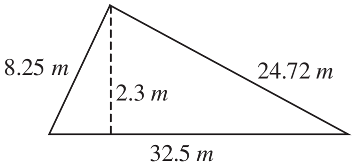
4. Triángulo isósceles



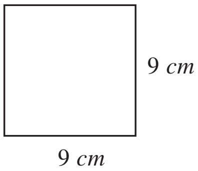
5. Pentágono regular



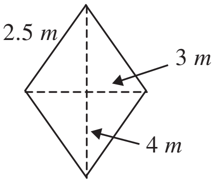
6. Triángulo escaleno



7. Cuadrado



8. Rombo



Determina las superficies de:

9. Rectángulo de 10 y 15 *m*.
10. Paralelogramo de base $(x - 1)$ *m* y altura $(x - 2)$ *m*.
11. Triángulo de base 14 *dm* y altura 9 *dm*.
12. Trapecio de bases 6 y 4 *dm* y altura de 3.5 *dm*.
13. Círculo de radio 30 *cm*.
14. Círculo de diámetro 18 *cm*.

Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra el área de un cuadrado si el radio del círculo inscrito es de 10 *cm*.

16. Por impermeabilizar el techo de una casa rectangular de 12.5 por 15 *m* se pagaron $500. ¿Cuál es el precio por metro cuadrado?

17. Se quiere pintar una habitación que mide 10 metros de frente por 7 de fondo y 2.5 de alto, dicha habitación tiene 4 ventanas de 1 *m* de alto por 1.8 *m* de largo. ¿Cuál será el importe si se pagan $5 por m^2? Considera la pintura para el techo y una puerta de 1.5 $m \times 1.8$ *m*.

18. Precisa la base y la altura del triángulo que tiene 486 m^2 de área, si la base es los $\frac{3}{4}$ de la altura.

19. Un trapecio tiene 400 m^2 de área, los lados paralelos tienen 35 y 45 *m*. ¿Cuál es el valor de la altura?

20. ¿Cuántos círculos enteros de 4 *cm* de radio se pueden cortar de una hoja de lata de 80 *cm* de largo por 65 *cm* de ancho y cuál es el área total de ellos?

21. Encuentra el área del triángulo que tiene como longitud de sus lados:

    a) $a = 13$, $b = 9$, $c = 10$ *b)* $a = 7$, $b = 16$, $c = 11$ *c)* $a = 8$, $b = 5$, $c = 12$

22. El área de un paralelogramo está dada por la expresión $(x^2 + 17)\ m^2$, la base es igual a $(x + 5)\ m$, y su altura es igual a $(x – 2)\ m$. Determina el valor de x y el área de este cuadrilátero.

23. Encuentra el área del sector circular si:

    a) el radio mide 4 *cm* y el ángulo central es de 45°
    b) el radio mide 1 *cm* y el ángulo central es de 60°
    c) el diámetro mide 6 *cm* y el ángulo central es de 90°
    d) el diámetro mide 8 *cm* y el ángulo central es de 240°

24. Determina el área del segmento circular si:

    a) el radio del círculo es 2 *cm* y el ángulo central es de 90°
    b) el radio del círculo y la cuerda correspondiente al segmento circular miden 3 *cm*
    c) el radio del círculo mide 8 *cm* y la cuerda correspondiente al segmento mide $8\sqrt{2}$ *cm*

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área de figuras combinadas

Se obtienen las áreas por separado de cada una de las figuras, y se realizan las operaciones necesarias para hallar el área que se pide.

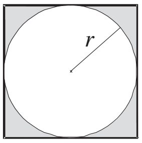
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Se inscribe una circunferencia de radio r en un cuadrado, determina el área que existe entre las 2 figuras.

Solución

El área sombreada se obtiene al restar al área del cuadrado el área del círculo, entonces:



$$A_s = (2r)^2 – (\pi r^2) = 4r^2 – \pi r^2 = r^2\,(4 – \pi)$$

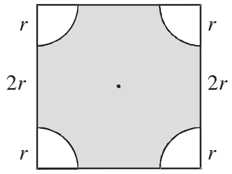
Por tanto, el área sombreada es $A_s = r^2\,(4 – \pi)$

2 En cada una de las esquinas de un cuadrado de lado 4 r, se tienen cuartos de circunferencia de radio r con centro en cada uno de los vértices del cuadrado, determina el área entre el cuadrado y los cuartos de circunferencia.

Solución

El área sombreada (As) se obtiene mediante la resta del área del cuadrado (A_1), menos el área de los cuatro cuartos del círculo (A_2), por tanto:

$$A_s = A_1 - A_2$$



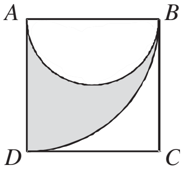
Donde,

$$A_1 = (4r)^2 = 16r^2 \text{ y } A_2 = 4\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = \pi r^2$$

Por consiguiente, el área sombreada es:

$$A_s = 16r^2 - \pi r^2 = r^2(16 - \pi)$$

3 Determina el perímetro de la figura sombreada si el área del cuadrado $ABCD$ es 1 cm^2



Solución

El perímetro de la figura sombreada se define como:

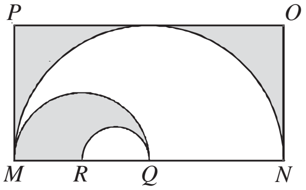
$$P = \overline{AD} + \widehat{AB} + \widehat{BD}$$

Pero $\widehat{AB} = \frac{1}{2}(2\pi)\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right) = \pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$ y $\widehat{BD} = \frac{1}{4}(2\pi)\left(\overline{AB}\right) = \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{2}\pi$

En consecuencia, el perímetro es:

$$P = 1 + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = (1 + \pi)\ cm$$

4 Calcula el área y perímetro de la región sombreada si $\overline{ON} = 6\ cm$, $\overline{MN} = 12\ cm$, Q es el punto medio de $\overline{MN}$ y R es el punto medio de $\overline{MQ}$.



Solución

El área sombreada (A_s) se obtiene de la siguiente manera:

$$A_s = \text{Rectángulo } MNOP - \text{Semicirc. en } MN + \text{Semicirc. en } MQ - \text{Semicirc. en } RQ$$

Siendo:

Semicircunferencia con diámetro en $MN = \frac{1}{2}\pi(6)^2$

Semicircunferencia con diámetro en $MQ = \frac{1}{2}\pi(3)^2$

Semicircunferencia con diámetro en $RQ = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Si se sustituye en A_s, se tiene que:

$$A_s = (12)(6) - \frac{1}{2}\pi(6)^2 + \frac{1}{2}\pi(3)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 72 - 18\pi + \frac{9}{2}\pi - \frac{9}{8}\pi = \left(72 - \frac{117}{8}\pi\right)cm^2$$

Luego, el perímetro de la figura sombreada es:

$$P = \overline{MP} + \overline{PO} + \overline{ON} + \widehat{NM} + \widehat{MQ} + \widehat{QR} + \overline{RM}$$

Si sustituyes los valores de los segmentos y de las semicircunferencias resulta que:

$$P = 6 + 12 + 6 + \pi(6) + \pi(3) + \pi\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \left(27 + \frac{21}{2}\pi\right)cm.$$

Por tanto, el área y perímetro de la figura sombreada son: $\left(72 - \frac{117}{8}\pi\right)cm^2$ y $\left(27 + \frac{21}{2}\pi\right)cm$, respectivamente.

EJERCICIO 32

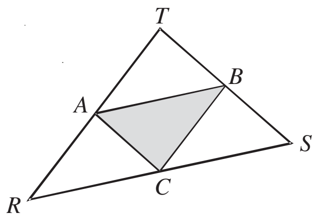
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. De la figura, A, B, C son los puntos medios de los lados del $\Delta\, RST$.

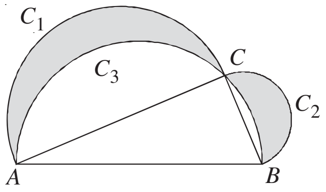
   Determina:

   a) $\overline{TS}$ si $\overline{AC} = 12\ cm$, *b)* $\overline{BC}$ si $\overline{RT} = 26\ cm$

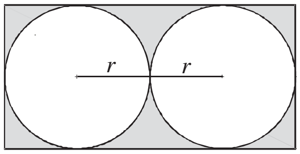
   c) Área y perímetro del $\Delta\, ABC$ si $\overline{RT} = 42\ cm$, $\overline{RS} = 30\ cm$ y $\overline{ST} = 16\ cm$



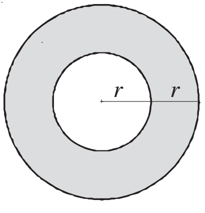
2. Encuentra el área sombreada de la siguiente figura: los centros de C_1 y C_2 son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, $\overline{AB}$ es diámetro de C_3 y tiene una longitud de 25 *cm*, el lado $\overline{AC} = 24\ cm$.



3. Se inscriben 2 circunferencias de radio r en un rectángulo, determina el área sombreada.

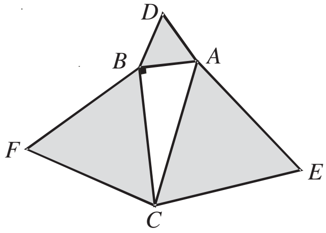


4. Se tienen 2 círculos concéntricos, determina el área del anillo circular si el radio de uno de ellos es el doble del otro.

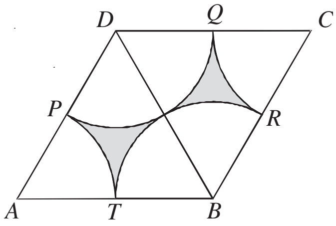


5. Si el $\Delta\, ABC$ es rectángulo y los $\Delta\, AEC$, $\Delta\, BDA$, $\Delta\, CFB$ son equiláteros, demuestra que:

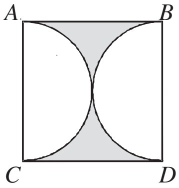
$$A_{\Delta\, BDA} + A_{\Delta\, CFB} = A_{\Delta\, AEC}$$



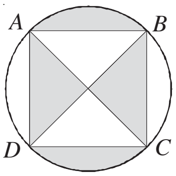
6. Los triángulos *ABD* y *BCD* son equiláteros de lado 10 *cm*; *Q*, *R*, *S* y *T* son los puntos medios de los lados de los triángulos. Determina el área sombreada.



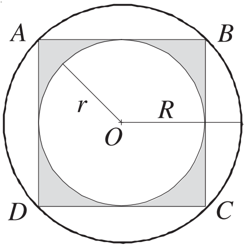
7. En un cuadrado *ABCD* de lado 10 *cm* se inscriben 2 semicircunferencias, como se muestra en la figura. Encuentra el área sombreada.



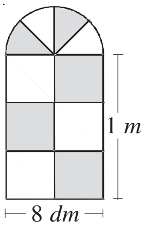
8. Se inscribe un cuadrado de lado 20 *dm* en una circunferencia. Determina el área sombreada que se muestra en la figura.



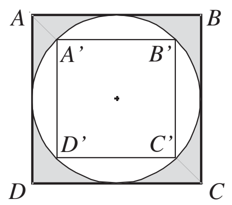
9. La figura *ABCD* es un cuadrado y $r = \frac{2}{3}R$. Determina el área sombreada si $R = 12$ *mm*.



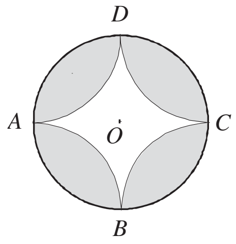
10. Calcula la cantidad de vitral opaco que se necesita en la siguiente ventana de tipo bizantino.



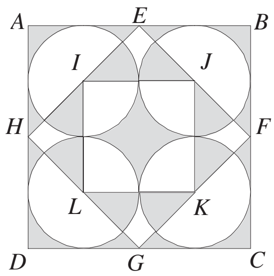
11. Si la figura $ABCD$ es un cuadrado y el área $A'B'C'D'$ tiene 392 cm^2, determina el área sombreada.



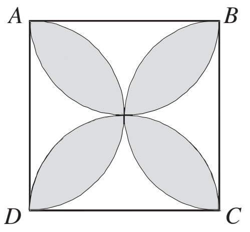
12. Precisa el área y el perímetro de la zona sombreada si $\overline{OC} = 24$ mm y los arcos $\widehat{AD}, \widehat{AB}, \widehat{BC}$ y $\widehat{CD}$ son cuartos de circunferencia.



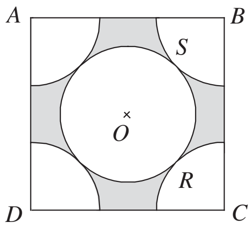
13. Encuentra el área sombreada si la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 16 mm, los puntos E, F, G, H son puntos medios del cuadrado $ABCD$, y los puntos I, J, K, L son puntos medios del cuadrado $HEFG$.



14. Halla el área de la zona sombreada si la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 16 mm, y AB, BC, CD y DA son semicircunferencias.



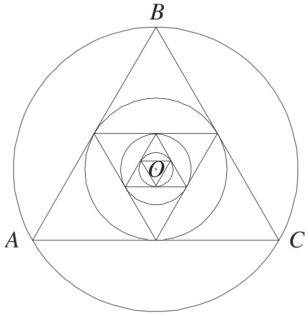
15. La figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 32 cm, R y S son puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. Determina el área sombreada.



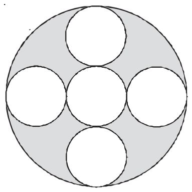
16. Si el triángulo ABC es equilátero y $\overline{OA} = 16\ dm$:

   a) Calcula el área del triángulo más pequeño.

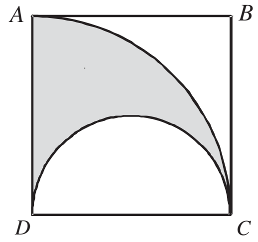
   b) Calcula la suma de todas las superficies de los triángulos si la figura se proyecta infinitamente.



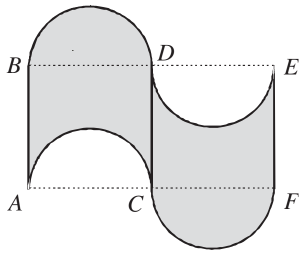
17. Determina el área de la zona sombreada en la siguiente figura si el diámetro del círculo mayor mide 18 *cm.*



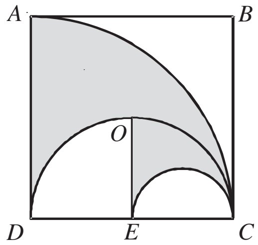
18. Encuentra el área de la zona sombreada si $\overline{AC} = \sqrt{2}cm$ y $ABCD$ es un cuadrado.



19. Determina el área y perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si $ABDC$ y $DCFE$ son cuadrados de lado 1 *cm.*



20. Precisa el área y perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si $ABCD$ es un cuadrado de lado 4 *cm* y E es el punto medio de $\overline{CD}$.

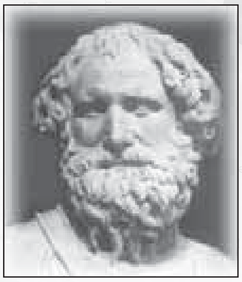


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 10

CUERPOS GEOMÉTRICOS, ÁREAS Y VOLÚMENES

Reseña HISTÓRICA



Arquímedes
(287 – 212 *a. C.*)

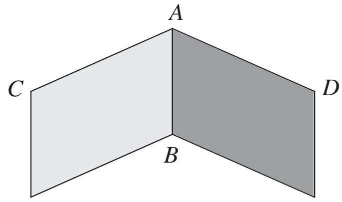
"Dadme un punto de apoyo y moveré al mundo"

Matemático y geómetra griego, a quien se considera el mayor científico y matemático de la Antigüedad, entre sus legados destacan: el principio de Arquímedes, sus aportes a la cuadratura del círculo, el estudio de la palanca, el tornillo de Arquímedes, la espiral de Arquímedes y la relación aproximada que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, lo que dio origen al número π (pi).

Con sus estudios sobre áreas y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas se anticipó al descubrimiento del cálculo integral. Demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe.

Ángulo diedro

Es el espacio que limitan dos semiplanos (caras) que tienen una recta en común (arista).

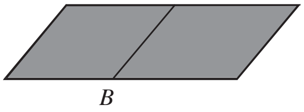


$\overline{AB}$: Arista
CAB, DAB: Caras

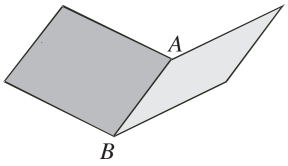
Clasificación

Un diedro es agudo, recto, obtuso o llano, según la medida del ángulo rectilíneo correspondiente.

Diedro llano. Se forma por dos semiplanos opuestos.

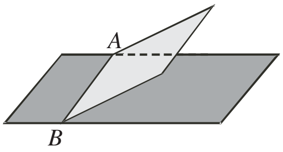


Diedro cóncavo. Es aquel cuya medida es mayor que un diedro llano.



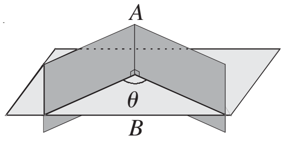
Diedro convexo. Su medida es menor que un diedro llano.

Diedros adyacentes. Son aquellos cuya suma es igual a un diedro llano.



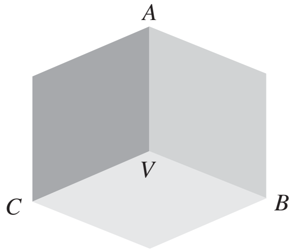
Rectilíneo correspondiente a un diedro. Es el ángulo plano θ formado por lados perpendiculares a la arista sobre las caras y es igual al ángulo diedro.

Se traza un plano perpendicular a la arista del diedro y se obtiene en la intersección el rectilíneo correspondiente.



Ángulo triedro

Es el espacio que comprenden tres planos, los cuales se cortan dos a dos y tienen un punto en común.

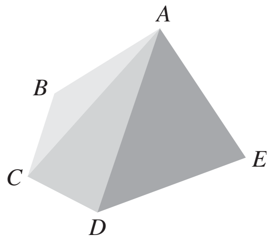


V: Vértice
$\overline{AV}$, $\overline{CV}$ y $\overline{BV}$*:* Arista
AVC, AVB y *BVC:* Caras

Clasificación

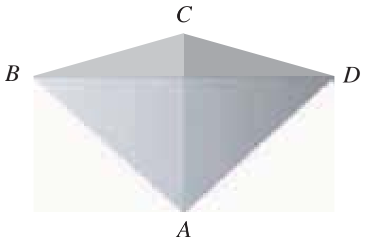
Triedros escalenos. Si las caras son desiguales.

$$BAC \neq CAD \neq ADE$$



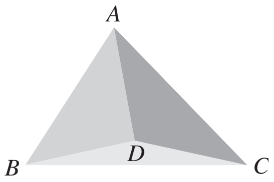
Triedros isósceles. Si dos caras son iguales y una desigual.

$$ABC = ACD \neq ABD$$



Triedros equiláteros. Si las caras son iguales.

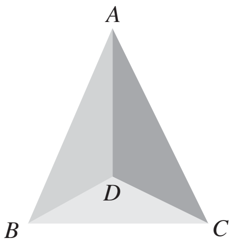
$$ADB = BDC = CDA$$



Triedros trirrectángulos. Si sus diedros y caras son rectos.

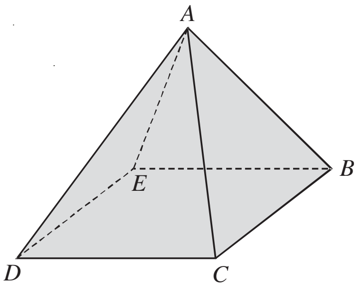
$$ADB \perp ADC,\ BDA \perp BDC,\ BDC \perp CDA$$

$$\angle\ ADB = \angle\ BDC = \angle\ CDA = 90º$$



Ángulo poliedro

Es el ángulo que forman tres o más planos que concurren en un punto llamado vértice del poliedro. De acuerdo con el número de caras, recibe el nombre de triedro, tetraedro, pentaedro, etcétera.



A: Vértice del poliedro

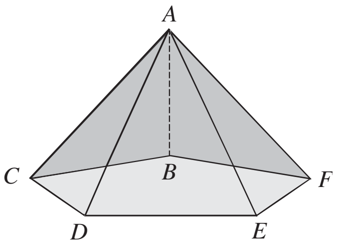
$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$: Aristas

AED, *ADC*, *ACB*, *ABE*: Caras

Clasificación

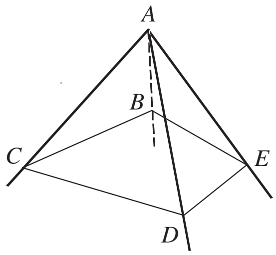
Ángulo poliedro regular. Si todos los diedros y todas las caras son iguales entre sí.

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF = \angle FAB$$



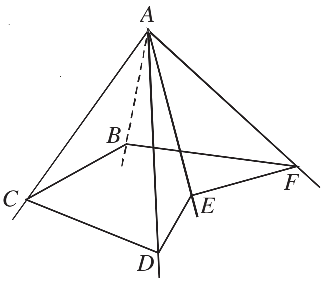
Ángulo poliedro cóncavo. Si al cortar sus caras con un plano determina un polígono cóncavo.

En el cuadrilátero *BEDC:* $\angle B$, $\angle E$, $\angle D$ y $\angle C$ son menores que 180°



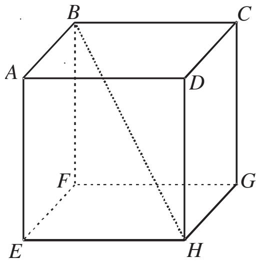
Ángulo poliedro convexo. Si al cortar sus caras mediante un plano determina un polígono convexo.

En el polígono *BCDEF:* $\angle E$ es mayor que 180°



Poliedro

Es un cuerpo geométrico al que limitan polígonos.



Elementos

Cara. Cada uno de los polígonos que lo limitan.

El cuadrado *ABCD* es una cara del poliedro.

Arista. Las intersecciones de las caras del poliedro.

El segmento $\overline{AE}$ es una arista.

Vértice. Los puntos donde concurren las aristas de un poliedro.

El punto *D* es un vértice.

Ángulo diedro. Se forman con las caras que tienen un arista en común.

Lo forman las caras *ADHE* y *CDHG*.

Ángulo poliedro. Se forman por tres o más caras que tienen un vértice en común.

Lo forman las caras *ADHE*, *CDHG* y *ABCD*.

Diagonal. Recta que une dos vértices que no pertenecen a una misma cara.

La recta $\overleftrightarrow{BH}$ es una diagonal del poliedro.

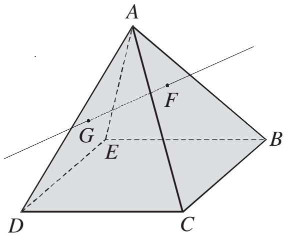
Superficie. Es el conjunto de todas las caras y se le denomina área del poliedro, ésta se obtiene mediante la suma de las áreas de las caras.

Volumen. Es la región de espacio que limita el área del poliedro.

Clasificación

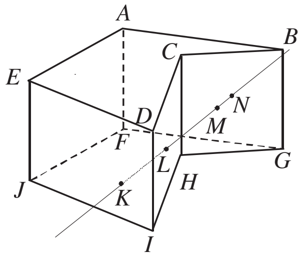
Poliedros cóncavos. Si una recta cualquiera cruza en dos puntos a sus caras.

G y *F* son los puntos de cruce.



Poliedros convexos. Si existe una recta que cruce en más de dos puntos a sus caras.

K, *L*, *M* y *N* son los puntos de cruce.

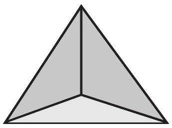


Poliedros regulares

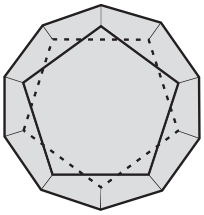
Son aquellos limitados por polígonos regulares iguales, sus ángulos poliedros son iguales y sus ángulos diedros iguales.

Clasificación

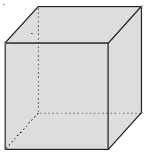
Tetraedro. Sus caras son cuatro triángulos equiláteros.



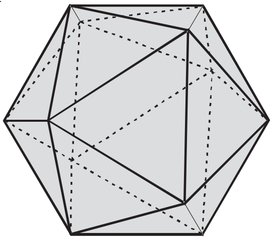
Dodecaedro. Sus caras son doce pentágonos regulares.



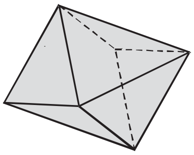
Hexaedro o cubo. Sus caras son seis cuadrados.



Icosaedro. Sus caras son veinte triángulos equiláteros.



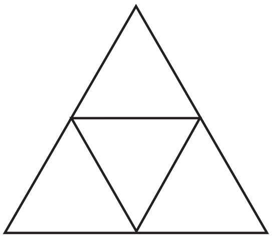
Octaedro. Sus caras son ocho triángulos equiláteros.



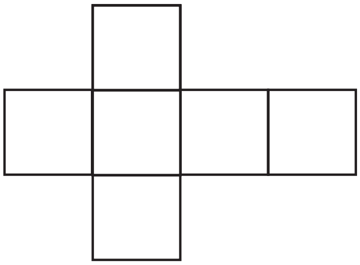
Desarrollo

Es la representación en un plano de los poliedros, en la cual se tienen sus caras unidas por las aristas.

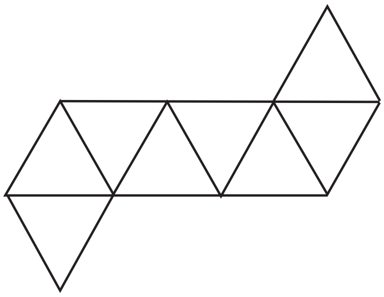
Tetraedro



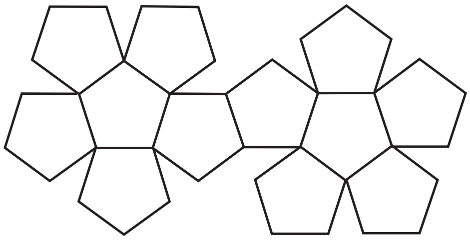
Hexaedro o cubo



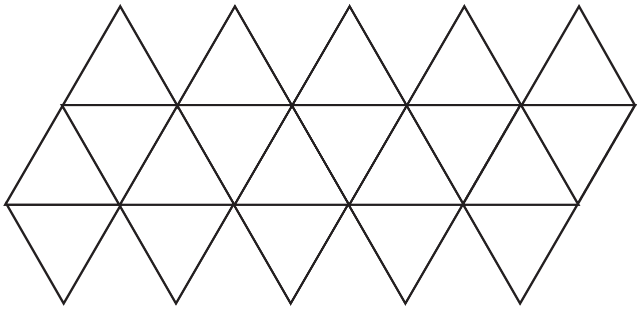
Octaedro



Dodecaedro



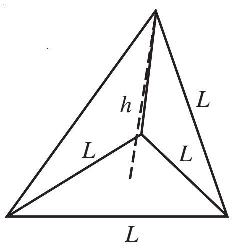
Icosaedro



Área y volumen de un poliedro regular

Tetraedro. Es el poliedro que forman cuatro caras triangulares iguales.

- **Área total:** cuatro veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** un tercio del área de una de las caras por la altura del cuerpo.



Área total en función de L

$$At = \sqrt{3}\,L^2$$

Volumen total en función de L

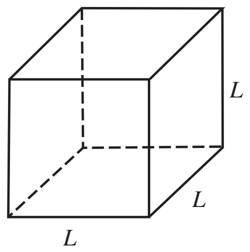
$$Vt = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2h = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara
h = Altura del cuerpo

Hexaedro o cubo. Es el poliedro que forman seis caras cuadradas iguales.

- **Área total:** seis veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** cubo de su arista (se le denomina arista a la longitud de uno de los lados de una de las caras).



Área total

$$At = 6L^2$$

Volumen total

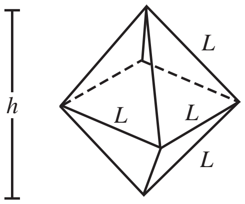
$$Vt = L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara

Octaedro. Es el poliedro que forman ocho caras triangulares iguales.

- **Área total:** ocho veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** un tercio del cuadrado de la arista por la altura total del cuerpo.



Área total en función de L

$$At = 2\sqrt{3}\,L^2$$

Volumen total en función de L

$$Vt = \frac{1}{3}L^2h = \frac{\sqrt{2}}{3}L^3$$

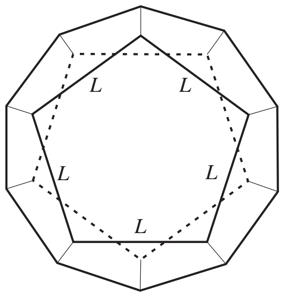
Donde,

L = Longitud de la cara

h = Altura total del cuerpo

Dodecaedro. Es el poliedro que forman 12 caras pentagonales iguales.

- **Área total:** doce veces el área de una de las caras.



Área total en función de L

$$At = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot L^2$$

Volumen total en función de L

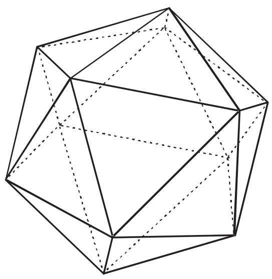
$$Vt = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara

Icosaedro. Es el poliedro que forman 20 caras triangulares iguales.

- **Área total:** veinte veces el área de una de las caras.



Área total en función de L

$$At = 5\sqrt{3}\cdot L^2$$

Volumen total en función de L

$$Vt = \frac{\left(15+5\sqrt{5}\right)}{12}L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área total y el volumen de un tetraedro con arista de 3 *cm*.

Solución

En este caso $L = 3\ cm$ y al sustituir en las fórmulas de área total y volumen se obtiene:

$$\text{Área total} = \sqrt{3}L^2 = \sqrt{3}(3\ cm)^2 = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(3\ cm)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(27\ cm^3) = \frac{9\sqrt{2}}{4}\ cm^3$$

2 Si el volumen de un hexaedro es de 128 cm^3, determina la arista y su área total.

Solución

El volumen de un hexaedro se define como: $V = L^3$, al sustituir V y despejar L, se obtiene:

$$(128\ cm^3) = L^3 \qquad \rightarrow \qquad L = \sqrt{128\ cm^3} = 4\sqrt{2}\ cm$$

Entonces, la arista del hexaedro es $4\sqrt{2}\ cm$ y el área total es:

$$A = 6L^2 = 6(4\sqrt{2}\ cm)^2 = 6(32\ cm^2) = 192\ cm^2$$

Por tanto, el área total es 192 cm^2.

3 El área total de un octaedro es $54\sqrt{3}\ cm^2$. Determina su volumen.

Solución

El área total de un octaedro se define como: $A = 2\sqrt{3}\ L^2$, al sustituir en A y despejar L se tiene:

$$54\sqrt{3}\ cm^2 = 2\sqrt{3}\ L^2 \qquad \rightarrow \qquad L = \sqrt{\frac{54\sqrt{3}\ cm^2}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{27\ cm^2} = 3\sqrt{3}\ cm$$

luego, el volumen se define como: $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\ L^3$, sustituyendo $L = 3\sqrt{3}\ cm$, se obtiene:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}(3\sqrt{3}\ cm)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}(27\sqrt{27}\ cm^3) = \frac{\sqrt{2}}{3}(81\sqrt{3}\ cm^3) = 27\sqrt{6}\ cm^3$$

Por tanto, el volumen del octaedro es: $27\sqrt{6}\ cm^3$.

4 Determina la altura de un tetraedro de arista $\sqrt{2}\ cm$ si su volumen es $\frac{1}{3}\ cm^3$.

Solución

El volumen de un tetraedro en términos de la arista y la altura es: $V = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2h$, sustituyendo V y L, se despeja h, entonces:

$$h = \frac{12V}{\sqrt{3}L^2} = \frac{12\left(\frac{1}{3}\ cm^3\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\ cm\right)^2} = \frac{4\ cm^3}{\sqrt{6}\ cm^2} = \frac{4\sqrt{6}}{6}\ cm = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$$

Por consiguiente, la altura del tetraedro es: $\frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$.

EJERCICIO **33**

Determina el área total y el volumen de los siguientes poliedros regulares:

1. Tetraedro de arista 2 cm
2. Tetraedro de arista $\sqrt{3}$ cm
3. Hexaedro de arista $2\sqrt{3}$ cm
4. Cubo de arista $\frac{1}{2}$ dm
5. Octaedro de arista 6 cm
6. Octaedro de arista $\sqrt{3}$ cm
7. Dodecaedro de arista $2\sqrt{5}$ cm
8. Dodecaedro de arista 2 cm
9. Icosaedro de arista $\sqrt{3}$ cm
10. Icosaedro de arista $5\sqrt{2}$ dm

Resuelve los siguientes problemas:

11. Determina el área total de un tetraedro, si su altura es $\sqrt{6}$ cm y su volumen es $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ cm^3
12. Determina el volumen de un tetraedro si su área total es $27\sqrt{3}$ cm^2
13. Encuentra la altura de un tetraedro si su volumen es $\frac{8}{3}$ cm^3
14. Encuentra el volumen de un cubo si su área total es 12 cm^2
15. Si el volumen de un cubo es 2 m^3, determina su arista y área total.
16. Determina la altura y el área total de un octaedro de volumen $72\sqrt{2}$ cm^3
17. La altura de un octaedro es de 2 cm y su área total es $4\sqrt{3}$ cm^2, encuentra su volumen.
18. Si la altura de un octaedro es de 6 cm determina su volumen.
19. Si el área total de un icosaedro es $10\sqrt{3}$ cm^2, encuentra su volumen.
20. Determina el volumen de un icosaedro de lado L en términos del área total.

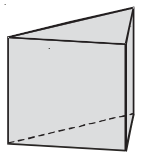
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Prisma

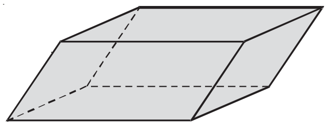
Es un poliedro en que dos de sus caras son polígonos iguales situados en planos paralelos; las caras restantes son paralelogramos.

Clasificación

Rectos. Si las caras laterales son perpendiculares a las bases.

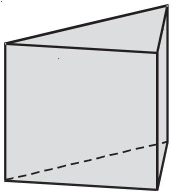


Oblicuos. Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases.

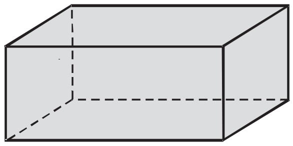


De acuerdo con sus bases, los prismas se clasifican también de acuerdo con el polígono que tienen como base.

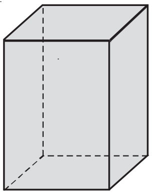
Prisma triangular. Sus bases son triángulos.



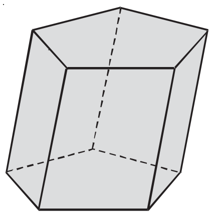
Prisma rectangular. Sus bases son rectángulos.



Prisma cuadrangular. Sus bases son cuadrados.

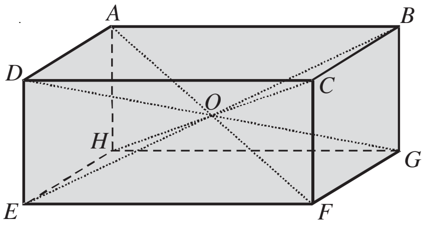


Prisma pentagonal. Sus bases son pentágonos.



Paralelepípedo

Son prismas cuya base es un paralelogramo y sus caras opuestas son paralelas, también se les conoce como ortoedros.



Características principales

1. Las cuatro diagonales de un paralelepípedo son iguales.

$$\overline{AF} = \overline{BE} = \overline{CH} = \overline{DG}$$

2. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.

$$O \text{ es el punto medio de } \overline{AF}, \overline{BE}, \overline{CH} \text{ y } \overline{DG}$$

3. El punto de intersección de las diagonales de un paralelepípedo es el centro del mismo.

$$O \text{ es el centro del paralelepípedo}$$

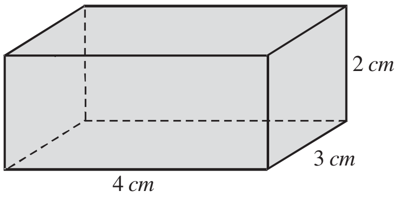
4. La longitud de una diagonal es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las aristas que concurren en un vértice.

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{CF}^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

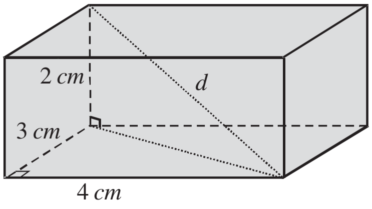
1 Determina la longitud de la diagonal de un paralelepípedo si su ancho mide 3 *cm*, el largo 4 *cm* y el alto 2 *cm*.



Solución

Sea *d* la diagonal del paralelepípedo, entonces:

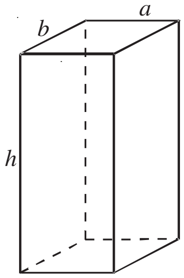
$$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}\ cm$$



Área y volumen

- **Área lateral de un prisma:** producto del perímetro de la base y la altura.
- **Área total:** suma del área lateral y el área de las dos bases.
- **Volumen de un prisma:** producto del área de la base y la altura del prisma.

Prisma rectangular



Área lateral

$A_L = 2(a + b)h$

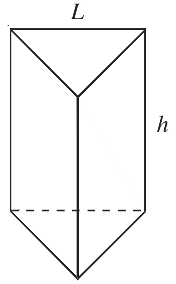
Área total

$A_T = 2(a + b)h + 2ab$

Volumen total

$V_T = abh$

Prisma triangular



Área lateral

$A_L = Ph$

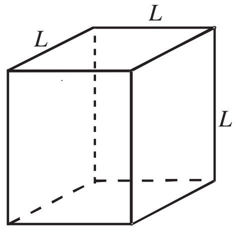
Área total

$A_T = Ph + 2A_B$

Volumen total

$V_T = A_B h$

Prisma cuadrangular (cubo)



Área lateral

$A_L = 4L^2$

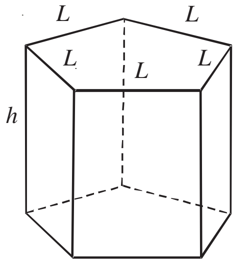
Área total

$A_T = 6L^2$

Volumen total

$V_T = L^3$

Prisma cuya base es un polígono de *n* lados



Área lateral

$A_L = Ph$

Área total

$A_T = Ph + 2A_B$

Volumen total

$V_T = A_B h$

EJEMPLOS

1 Determina el área lateral, área total y volumen de un prisma triangular de 2 *cm* de lado con altura de 4 *cm*.

Solución

El área lateral de un prisma triangular se define: $A_L = Ph$, se determina el perímetro de la base,

$$P = 3(2\ cm) = 6\ cm, \text{ entonces } A_L = (3)(2\ cm)(4\ cm) = 24\ cm^2$$

El área total de un prisma triangular se define: $A_T = Ph + 2A_B$, por lo que se obtiene el área de la base triangular mediante la fórmula de Herón de Alejandría:

$$A_B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{3(3-2)(3-2)(3-2)} = \sqrt{3}\ cm^2$$

Luego el área total es:

$$A_T = Ph + A_B = 24\ cm^2 + \sqrt{3}\ cm^2 = \left(24+\sqrt{3}\right)cm^2$$

El volumen del prisma triangular se define $V_T = A_B h$, entonces:

$$V_T = A_B h = \left(\sqrt{3}\ cm^2\right)\left(4\ cm\right) = 4\sqrt{3}\ cm^3$$

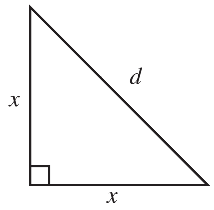
2 Determina el volumen de un prisma cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de área $\frac{25}{2}$ cm^2, si el área lateral del prisma es $\left(80+40\sqrt{2}\right)cm^2$.

Solución

El área de la base es un triángulo rectángulo isósceles, entonces:

$$A = \frac{1}{2}bh \quad \rightarrow \quad \frac{25}{2}cm^2 = \frac{1}{2}(x)(x) \quad \rightarrow \quad x^2 = 25\ cm^2 \quad \rightarrow \quad x = 5\ cm$$

luego, la hipotenusa (d) del triángulo es:



$$d^2 = x^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 2x^2 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{2}x$$

al sustituir $x = 5\ cm$ se obtiene:

$$d = 5\sqrt{2}\ cm$$

El área lateral de un prisma se define como: $A_L = Ph$, si $P = 10 + 5\sqrt{2}$, entonces:

$$h = \frac{A_L}{P} = \frac{80 + 40\sqrt{2}}{10 + 5\sqrt{2}} = \frac{8\left(10 + 5\sqrt{2}\right)}{10 + 5\sqrt{2}} = 8\ cm$$

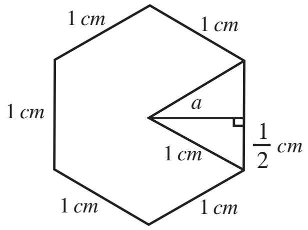
por tanto, el volumen del prisma es:

$$V_T = A_B\, h = \left(\frac{25}{2}\ cm^2\right)(8\ cm) = 100\ cm^3$$

3 Determina el área total y el volumen de un prisma hexagonal de lado 1 cm y altura 2 cm.

Solución

Se obtiene el área de la base que es el hexágono



$$A = \frac{1}{2}\ Pa, \text{ donde } a = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego,

$$A = \frac{1}{2}(6\ cm)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} cm\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

Área total

$$A_T = Ph + 2A_B = (6)(1\ cm)(2\ cm) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2 = \left(12 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) cm^2$$

Volumen

$$V_T = A_B\, h = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} cm^2\right)(2\ cm) = 3\sqrt{3}\ cm^3$$

EJERCICIO **34**

Determina el área lateral, total y volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Prisma rectangular de dimensiones 2, 3 y 5 cm.
2. Prisma cuya base es un triángulo equilátero de 4 cm de lado y 6 cm de altura.
3. Prisma cuadrangular si el lado de la base es 1 cm y su altura 4 cm.
4. Prisma de base un hexágono regular de lado 2.5 cm y altura 6.5 cm.
5. Paralelepípedo de dimensiones $\sqrt{2}$, 4 y $2\sqrt{2}$ cm.
6. Cubo de lado 2 cm.
7. Prisma cuadrangular si el área de la base es 12 cm^2 y la altura es 8 cm.
8. Prisma cuya base es un octágono regular de lado 10 cm y apotema $(5 + 5\sqrt{2})$ cm si su altura es de 5 cm.
9. Prisma hexagonal regular si el perímetro de la base es de 60 cm y la altura es el doble que el lado de la base.

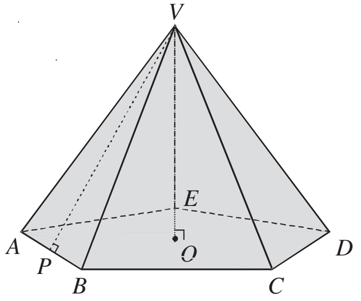
Resuelve los siguientes problemas:

10. Determina el área lateral de un prisma cuadrangular de volumen de 16 cm^3, si la altura mide 4 cm.
11. Determina el volumen de un cubo cuya diagonal es $3\sqrt{3}$.
12. Encuentra el área lateral de un paralelepípedo si las dimensiones de la base son 8 y 4 cm y una de sus diagonales mide $2\sqrt{21}$ cm.
13. Determina el volumen de un prisma cuya base es un triángulo isósceles de lados 2, 2 y 3 cm si la altura del prisma es el doble que la altura de la base.
14. Encuentra el área total de un prisma cuya base es un triángulo equilátero, si la altura excede en 1 cm al lado de la base y el área lateral es de 90 cm^2.
15. Encuentra el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 3 cm y área lateral de $18\sqrt{3}$ cm^2.
16. Determina el área lateral de un prisma cuyo volumen es de 8 cm^3, si su base es un triángulo rectángulo isósceles con área de 2 cm^2.
17. El área lateral de un paralelepípedo si el largo de la base es el doble que el ancho, su altura es de 2 cm y su diagonal mide 7 cm.
18. Expresa el volumen de un cubo de arista x en términos de su área total y área lateral.
19. De acuerdo con la fórmula anterior encuentra el volumen de un cubo si su área total es de 27 cm^2.
20. Expresa el área lateral de un paralelepípedo en términos de su volumen si sus dimensiones son L, $2L$ y $\frac{3}{2}L$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Pirámides

Es el espacio entre un ángulo poliedro y un plano que corta a las aristas del mismo, que recibe el nombre de base, la superficie que lo limita se denomina superficie piramidal y son caras triangulares (caras laterales) terminadas en un vértice en común.

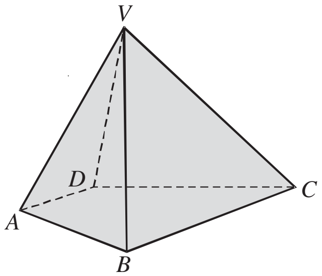


V: Vértice
O: Centro de la base
$\overline{AV}$: Generatriz
$\overline{OV}$: Altura
$\overline{PV}$: Apotema
$ABCDE$: Base de la pirámide
AVB, BVC, CVD, DVE y EVA: Caras laterales

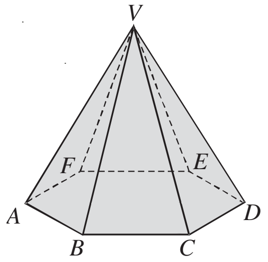
Pirámide recta. Es aquella cuyas caras son triángulos isósceles.

En la figura:

$$\overline{AV} = \overline{BV} = \overline{CV} = \overline{DV}$$



Pirámide regular. Es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.



En la figura:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$$

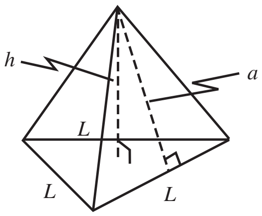
De acuerdo con el número de lados de la base, las pirámides se clasifican en:

1. Pirámide triangular, su base es un triángulo.
2. Pirámide cuadrangular, su base es un cuadrado.
3. Pirámide pentagonal, su base es un pentágono.

Área y volumen

- **Área lateral:** producto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide (apotema de una pirámide es la altura de los triángulos que forman sus caras).
- **Área total:** suma del área lateral y el área de la base.
- **Volumen de la pirámide:** tercera parte del área de la base por la altura.

Pirámide regular



Área lateral

$$A_L = \frac{Pa}{2}$$

Área total

$$A_T = A_L + A_B$$

Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}A_B h$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área total y el volumen de una pirámide cuadrangular con arista de la base de 3 *cm*, apotema de 6 *cm* y altura $\frac{3}{2}\sqrt{15}$.

Solución

El área total se define como $A_T = A_L + A_B$, entonces se determina el área lateral así como el área de la base:

Área lateral de la pirámide:

$$A_L = \left(\frac{Pa}{2}\right) = \left(\frac{4\cdot 3\cdot 6}{2}\right) = \frac{72}{2} = 36\ cm^2$$

Área de la base de la pirámide

$$A_B = L^2 = (3\ cm)^2 = 9\ cm^2$$

Por tanto, el área total es:

$$A_T = A_L + A_B = 36\ cm^2 + 9\ cm^2 = 45\ cm^2$$

El volumen se define como: $V_T = \frac{1}{3}A_B h$, sustituyendo $A_B = 9\ cm^2$ y $h = \frac{3}{2}\sqrt{15}\ cm$, se obtiene:

$$V_T = \frac{1}{3}A_B h = \frac{1}{3}(9\ cm^2)\left(\frac{3}{2}\sqrt{15}\ cm\right) = \frac{9}{2}\sqrt{15}\ cm^3$$

2 Determina el área lateral, área total y volumen de una pirámide hexagonal regular, si el lado de la base es de 4 *cm* y la apotema de la pirámide mide 5 *cm*.

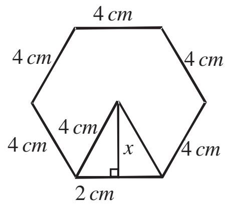
Solución

El área lateral se define como: $A_L = \dfrac{Pa}{2}$, siendo $P = 6(4\ cm) = 24\ cm$

$$A_L = \frac{Pa}{2} = \frac{(24\ cm)(5\ cm)}{2} = \frac{120\ cm^2}{2} = 60\ cm^2$$

El área total se define como: $A_T = \dfrac{Pa}{2} + A_B$, y para determinarla se debe hallar el área de la base, entonces:

$$A_B = \frac{Px}{2}, \text{ donde } x\text{: apotema del hexágono.}$$



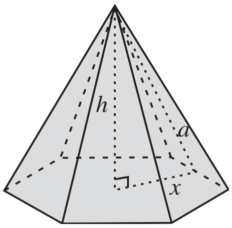
$$x = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ cm$$

$$A_B = \frac{6(4\ cm)(2\sqrt{3}\ cm)}{2} = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

Por tanto, $A_T = 60\ cm^2 + 24\sqrt{3}\ cm^2 = \left(60 + 24\sqrt{3}\right) cm^2$

El volumen se define como: $V_T = \dfrac{1}{3} A_B h$, de la cual no se conoce la altura, pero la pirámide es regular, esto indica que la altura coincide con el centro del polígono, generando un triángulo rectángulo con las aristas, tanto de la base como de la pirámide, entonces:

$$h = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(5)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}\ cm$$

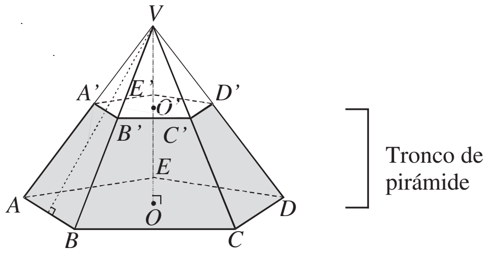


por tanto, el volumen es:

$$V_T = \frac{1}{3} A_B h = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\ cm^2\right)\left(\sqrt{13}\ cm\right) = 8\sqrt{39}\ cm^3$$

Tronco de pirámide

Es el poliedro que se obtiene al cortar una pirámide mediante una sección paralela a la base.



Características principales

- Si la pirámide inicial es regular, el tronco de pirámide también será regular y se formarán trapecios iguales.

$$ABB'A' = BCC'B' = \ldots = EAA'E'$$

- Las aristas laterales, alturas, apotemas y otras rectas trazadas desde el vértice quedan divididas en segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{BV}}{\overline{B'V}} = \ldots = \frac{\overline{EV}}{\overline{E'V}}$$

➡ Las áreas de la base y la sección paralela son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.

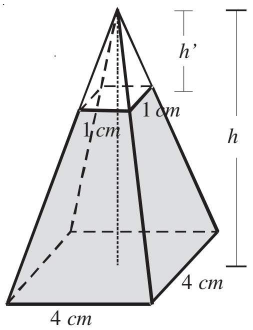
$$\frac{Área\,ABCDE}{Área\,A'B'C'D'E'} = \frac{\left(\overline{OV}\right)^2}{\left(\overline{O'V}\right)^2}$$

EJEMPLOS

1 Una pirámide cuadrangular con base de 4 *cm* por lado y altura 8 *cm*, se corta mediante una sección paralela de lado de 1 *cm*, determina el volumen del tronco de pirámide que se genera.

Solución

Se establece la proporcionalidad entre las áreas de los polígonos y su distancia al vértice, sea *A*' y *A* el área del cuadrado de lado 1 *cm* y 4 *cm* respectivamente, entonces:



$$\frac{A'}{A} = \frac{(h')^2}{(h)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1\,cm^2}{16\,cm^2} = \frac{h'^2}{64\,cm^2}$$

al despejar *h*', se obtiene:

$$h' = \sqrt{\frac{(1\,cm^2)(64\,cm^2)}{16\,cm^2}} = \sqrt{4\,cm^2} = 2\,cm$$

por tanto, el volumen del tronco es la diferencia de volúmenes entre la pirámide mayor (*V*) y la menor (*V*'):

$$V_T = V - V' = \frac{1}{3}(4\,cm)^2(8\,cm) - \frac{1}{3}(1\,cm)^2(2\,cm) = \frac{32}{3}cm^3 - \frac{2}{3}cm^3$$
$$= 10\,cm^3$$

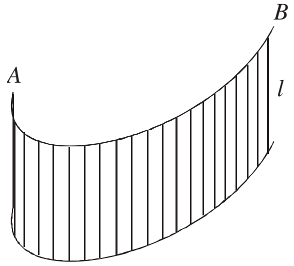
Cuerpos con superficies no planas

Este tipo de cuerpos se clasifican en:

Superficie cilíndrica. La genera una línea recta que se mueve siempre paralela a sí misma sobre una directriz.

$\overline{AB}$: Directriz

l : Generatriz

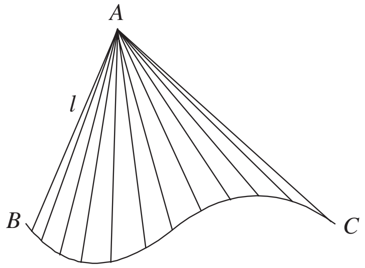


Superficie cónica. La genera una línea recta que se mueve sobre una directriz y pasa por un punto fijo llamado vértice.

A: Vértice

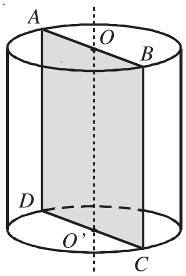
$\overline{BC}$: Directriz

l : Generatriz



Figuras de revolución. Las genera un plano al girar sobre una recta que pertenece al mismo plano.

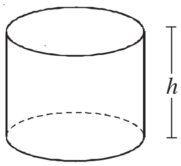
$\overline{OO'}$: Eje de la superficie
ABCD: Figura plana



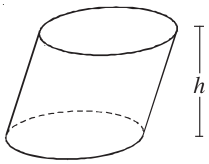
Cilindro circular

Superficie cilíndrica cerrada que limitan dos círculos iguales y paralelos llamados bases.

Cilindro circular recto. Aquel cuyas generatrices son perpendiculares a las bases.



Cilindro circular oblicuo. Aquel cuyas generatrices no son perpendiculares a las bases.

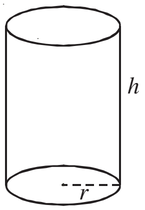


Área y volumen de un cilindro circular recto

Área lateral: producto del perímetro de la base y la altura del cilindro.

Área total: la suma del área lateral y las áreas de la base y tapa.

Volumen: producto del área de la base y la altura.

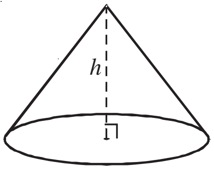


Área lateral
$A_L = 2\pi r h$
Área total
$A_T = 2\pi r (h + r)$
Volumen total
$V_T = \pi r^2 h$

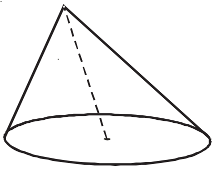
Cono circular

Es la región del espacio que limita una superficie cónica cerrada y cuya base es un círculo.

Cono circular recto. Si el segmento que une al vértice y al centro de la base es perpendicular a la base.



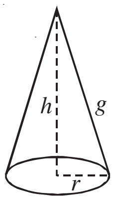
Cono circular oblicuo. Si el segmento que une al vértice y al centro de la base no es perpendicular a la base.



Área y volumen de un cono circular recto

- **Área lateral:** producto de π, radio y la generatriz.
- **Área total:** la suma del área lateral y el área de la base.

➲ **Volumen:** producto del área de la base y la tercera parte de la altura. La altura del cono es la recta que baja de su vértice al centro de la base.



Área lateral

$A_L = \pi r g$

Área total

$A_T = \pi r (g + r)$

Volumen total

$V_T = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área lateral, área total y el volumen de un cilindro con radio de la base de 3 *cm* y con altura de 6 *cm*.

Solución

El área lateral de un cilindro se define como: $A_L = 2\pi r h$, se sustituye $r = 3\ cm$ y $h = 6\ cm$ y se obtiene:

$$A_L = 2\pi (3\ cm)(6\ cm) = 36\pi\ cm^2$$

El área total de un cilindro está dada por la fórmula: $A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$$A_T = 2\pi (3\ cm)(6\ cm) + 2\pi (3\ cm)^2 = 36\pi\ cm^2 + 18\pi\ cm^2 = 54\pi\ cm^2$$

El volumen se define como: $V_T = \pi r^2 h$, entonces:

$$V_T = \pi (3\ cm)^2 (6\ cm) = \pi (9\ cm^2)(6\ cm) = 54\pi\ cm^3$$

2 Determina el área lateral, área total y el volumen de un cono recto cuyo radio mide 1 *cm* y la altura 2 *cm*.

Solución

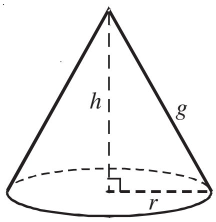
Se calcula la medida de la generatriz, la cual forma un triángulo rectángulo con la altura y el radio de la base, entonces:

$$g^2 = h^2 + r^2 \quad \rightarrow \quad g^2 = (2\ cm)^2 + (1\ cm)^2$$

$$g^2 = 4\ cm^2 + 1\ cm^2$$

$$g = \sqrt{5\ cm^2}$$

$$g = \sqrt{5}\ cm$$



Se sustituyen en las fórmulas $r = 1\ cm$, $h = 2\ cm$ y $g = \sqrt{5}\ cm$.

Área lateral

$$A_L = \pi r g = \pi(1\ cm)\left(\sqrt{5}\ cm\right) = \sqrt{5}\ \pi\ cm^2$$

Área total

$$A_T = \pi r (g + r) = \pi(1\ cm)\left(\sqrt{5}\ cm + 1\ cm\right) = \pi\left(\sqrt{5} + 1\right) cm^2$$

Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (1\ cm)^2 (2\ cm) = \frac{2}{3}\pi\ cm^3$$

EJERCICIO 35

Determina el área lateral, total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Pirámide regular cuya base cuadrangular de lado tiene 3 *cm* si su altura mide 4 *cm*.
2. Pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero de lado 1 *cm* si su altura mide $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *cm* y la arista de las caras laterales mide 1 *cm*.
3. Pirámide regular cuya base es un hexágono regular de lado 2 *cm* si su altura es 5 *cm*.
4. Pirámide regular cuya base es un octágono regular de lado 4 *cm*, apotema 4.8 *cm* y altura de 6.4 *cm*.
5. Cilindro circular recto de radio 3 *cm* y altura 5 *cm*.
6. Cilindro circular recto de diámetro 8 *cm* y altura 4 *cm*.
7. Cono circular recto de radio 7 *cm*, altura 9 *cm* y generatriz $\sqrt{150}$ *cm*.
8. Cono circular recto de radio 2 *cm* y altura 8 *cm*.
9. Cono circular recto de diámetro 5 *cm* y altura $\sqrt{3}$ *cm*.
10. Cono circular recto de radio 1 *cm* y generatriz 3 *cm*.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es un trapecio isósceles de base menor 2 *cm*, base mayor 4 *cm* y lados iguales $\sqrt{10}$ *cm* si la altura de la pirámide es de 4 *cm*.
12. Determina el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa $2\sqrt{2}$ *cm* y altura de la pirámide 6 *cm*.
13. Encuentra el volumen de una pirámide cuadrangular de lado 6 *cm*, si sus caras laterales son triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 8 *cm*.
14. Una pirámide cuadrangular de base 8 *cm* por lado y altura 10 *cm*, se corta mediante una sección paralela de lado 4 *cm*, determina el volumen del tronco de pirámide que se genera.
15. El área lateral de una pirámide es 60 cm^2, si su base es un hexágono regular y la apotema de la pirámide mide 5 *cm*, determina el área de la base.
16. Encuentra el volumen de un cilindro circular recto si su área total es $32\pi\ cm^2$ y su altura mide 6 *cm*.
17. El volumen de un cilindro circular recto es $175\pi\ cm^3$, si el radio es dos unidades menos que su altura, determina su área lateral.
18. El área total de un cono circular recto es $24\pi\ cm^2$, si la generatriz excede en dos unidades al radio de su base, determina su volumen.
19. El área lateral de un cono circular recto es $32\pi\ cm^2$, si la medida del radio es la mitad de la generatriz, encuentra el área total.
20. Expresa el área total de un cono circular recto en términos de su volumen si su altura es el doble de su radio.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Esfera

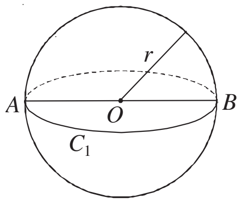
Es un sólido geométrico al que limita una superficie esférica, cuyos puntos equidistan de un punto fijo que se conoce como centro de la esfera.

O: Centro de la esfera

r: Radio de la esfera

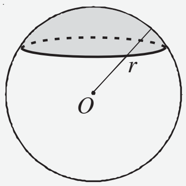
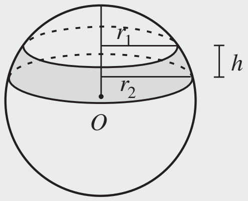
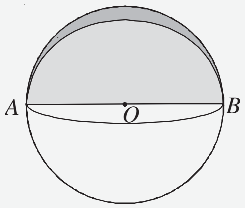
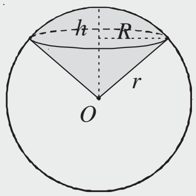
$\overline{AB}$: Diámetro de la esfera

C_1: Circunferencia mayor



Figuras esféricas y zonas esféricas

Resultan de cortar la esfera y la superficie esférica.

Casquete esférico. Se obtiene al dividir la superficie esférica en dos partes, mediante un plano; si éste pasa por el centro de la esfera los casquetes son iguales. **Segmento esférico.** Es el espacio que limitan el casquete esférico y el círculo base.	
Zona esférica. Es aquella superficie esférica limitada por dos planos. **Rebanada esférica.** Es el espacio que limitan dos planos paralelos y la zona esférica correspondiente.	
Huso esférico. Es la porción de superficie esférica que se obtiene con dos planos que concurren en un diámetro. **Cuña esférica.** Es la porción de espacio que limitan dos planos que concurren en un diámetro y el huso esférico correspondiente.	
Sector esférico. Es la porción de espacio limitado por un casquete esférico y la superficie cónica con vértice en el centro de la esfera cuya directriz es la base del casquete.	

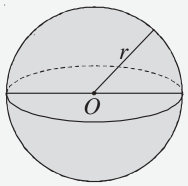
Área de figuras esféricas y volumen de cuerpos esféricos

Área: es igual al área de cuatro círculos máximos de esa esfera.

$$A = 4\pi r^2$$

Volumen: es igual a cuatro tercios de π por el radio al cubo.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



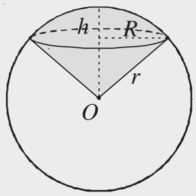
Volumen de un sector esférico

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

Donde

r: Radio de la esfera

h: Altura del casquete esférico

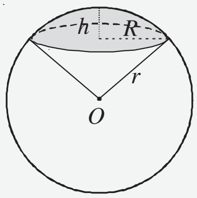


Área de un casquete esférico y zona esférica

$$A = 2\pi rh$$

Volumen de un segmento esférico

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r - h)$$



Volumen de una rebanada esférica: diferencia de volúmenes de los segmentos esféricos con radio r_2 y r_1 respectivamente.

$$V = V_2 - V_1$$

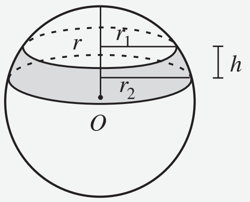
Donde

r: Radio de la esfera

r_1 y r_2: Radios de las circunferencias que limitan la rebanada

h: Altura del casquete esférico o zona esférica

R: Radio de la base del casquete esférico



Área del huso esférico

$$A = \frac{\pi r^2 n}{90°}$$

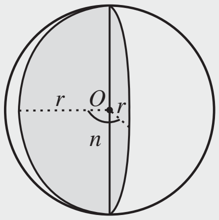
Volumen de la cuña esférica

$$V = \frac{\pi r^3 n}{270°}$$

Donde

r: Radio de la esfera

n: Ángulo que forman los planos de un huso



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área y el volumen de una esfera de 6 *cm* de diámetro.

Solución

El área de una esfera está dada por la fórmula: $A = 4\pi r^2$, si $r = \frac{D}{2}$ entonces:

$$A = 4\pi\left(\frac{6\ cm}{2}\right)^2 = 4\pi(9\ cm^2) = 36\pi\ cm^2$$

El volumen de una esfera está dado por la fórmula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, se sustituye $r = 3$, obteniendo:

$$V = \frac{4}{3}\pi(3\ cm)^3 = \frac{4}{3}\pi(27\ cm^3) = 36\pi\ cm^3$$

Por tanto, $A = 36\pi\ cm^2$ y $V = 36\pi\ cm^3$.

2 Determina el área del huso esférico y el volumen de la cuña esférica que forman dos planos con un ángulo diedro de 45º, si el radio de la esfera es de 9 *m*.

Solución

El área del huso esférico está dada por la fórmula: $A = \frac{\pi r^2 n}{90°}$, sustituyendo $r = 9\ m$ y $n = 45°$, se obtiene:

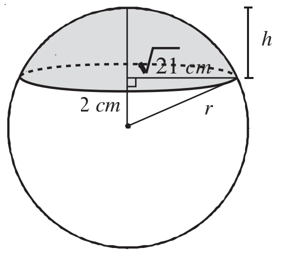
$$A = \frac{\pi(9\ m)^2 \cdot 45°}{90°} = \frac{\pi(81\ m^2)}{2} = \frac{81\pi}{2}\ m^2$$

El volumen de una cuña se obtiene mediante la fórmula: $V = \frac{\pi r^3 n}{270°}$, entonces:

$$V = \frac{\pi r^3 n}{270°} = \frac{\pi(9\ m)^3 \cdot 45°}{270°} = \frac{\pi \cdot 729\ m^3}{6} = \frac{243\pi}{2}\ m^3$$

Por tanto, el área del huso esférico y el volumen de la cuña son: $\frac{81\pi}{2}\ m^2$ y $\frac{243\pi}{2}\ m^3$ respectivamente.

3 Determina el área del casquete esférico cuya base dista 2 *cm* del centro, si el radio de la base es $\sqrt{21}\ cm$.



Solución

El área de un casquete esférico se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$A = 2\pi rh$$

de los cuales se desconoce r y h, de la figura se tiene que:

$$r = \sqrt{(2\ cm)^2 + (\sqrt{21}\ cm)^2} = \sqrt{4\ cm^2 + 21\ cm^2} = \sqrt{25\ cm^2} = 5\ cm$$

luego, la altura del casquete es:

$$h = r - 2\ cm = 5\ cm - 2\ cm = 3\ cm$$

al sustituir $r = 5\ cm$ y $h = 3\ cm$ en $A = 2\pi rh$, se obtiene:

$$A = 2\pi(5\ cm)(3\ cm) = 30\pi\ cm^2$$

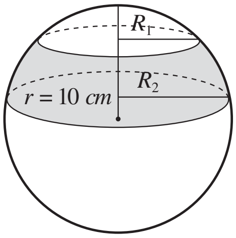
Por consiguiente, el área del casquete esférico es $30\pi\ cm^2$.

4 Una esfera de 10 *cm* de radio se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 2 *cm* y 6 *cm* respectivamente, determina el volumen del segmento esférico.

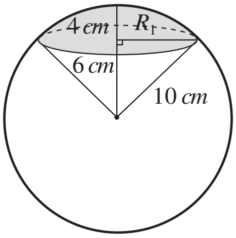
Solución

Para determinar el segmento esférico, primero se encuentran los volúmenes de los casquetes esféricos, como lo muestra la figura:

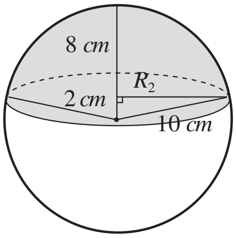
V = Volumen del segmento esférico



V_1 = Volumen del primer casquete



V_2 = Volumen del segundo casquete



$V = V_2 - V_1$

En la figura, $R_1 = \sqrt{100-36}$

$R_1 = 8\ cm$

En la figura, $R_2 = \sqrt{100-4}$

$R_2 = \sqrt{96}$

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h) = \frac{2}{3}\pi(10)^2(4) - \frac{1}{3}\pi(8)^2(10-4) = \frac{800}{3}\pi - \frac{384}{3}\pi = \frac{416}{3}\pi$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h) = \frac{2}{3}\pi(10)^2(8) - \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{96}\right)^2(10-8) = \frac{1600}{3}\pi - \frac{192}{3}\pi = \frac{1408}{3}\pi$$

Por tanto, $V = V_2 - V_1 = \frac{1408}{3}\pi\ cm^3 - \frac{416}{3}\pi\ cm^3 = \frac{992}{3}\pi\ cm^3$

EJERCICIO **36**

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el área y volumen de una esfera con radio de 4 *cm*.
2. Encuentra el volumen de una esfera cuyo diámetro mide $6\sqrt{5}$ *cm*.
3. El radio de una esfera es de 3 *cm*, determina el volumen de un sector esférico cuyo casquete esférico tiene una altura de 1 *cm*.
4. Determina el volumen de un sector esférico si la base de su casquete esférico se encuentra a 4 *cm* del centro de la esfera cuyo radio es de 9 *cm*.
5. El radio de una esfera mide 10 *cm*, ¿cuál es el área del casquete esférico cuya base se encuentra a 7 *cm* del centro de la esfera?
6. ¿Cuál es el área de un casquete esférico cuya base dista del centro de una esfera 2 *cm* y su radio mide $2\sqrt{15}$ *cm*?
7. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya base tiene una altura de 2 *cm* y el diámetro de la esfera mide 6 *cm*?
8. Encuentra el volumen de un segmento esférico si su base tiene un radio de 4 *cm* y el radio de la esfera mide 5 *cm*.
9. Una esfera con un radio de 12 *cm* se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 4 *cm* y 7 *cm* respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.
10. Una esfera con un radio de 1 *cm* se corta mediante dos planos paralelos, uno a cada lado del centro a una distancia de $\frac{1}{2}$ *cm* y $\frac{1}{3}$ *cm* respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.

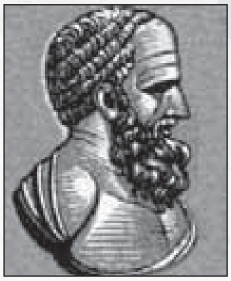
11. Encuentra el área del huso esférico si el ángulo que forman sus planos es de 60º y el radio de la esfera mide 10 *cm*.
12. El área de un huso esférico es $\frac{16}{3}\pi$, si el radio de la esfera mide 2 *cm*, ¿qué ángulo forma el huso esférico?
13. Calcula el volumen de una cuña esférica si el ángulo que forman sus planos es de 30º si el área de la esfera es $36\pi\, cm^2$.
14. Dos planos que concurren en un diámetro forman una cuña esférica de volumen $\frac{9}{2}\pi\, cm^3$ y un huso esférico de área $3\pi\, cm^2$, encuentra el radio, área y volumen de la esfera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 11

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TRIGONOMETRÍA



Hiparco de Nicea
(190-120 *a. C.*)

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo.

Desde hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos y las razones trigonométricas para efectuar medidas en la agricultura, así como para la construcción de pirámides.

Hiparco de Nicea

Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea. Uno de los principales desarrolladores de la trigonometría (plana y esférica), construyó tablas que relacionaban los ángulos centrales con las cuerdas delimitadas por su ángulo central correspondiente. Gracias a esta tabla, equivalente a una tabla de senos actual, logró relacionar los lados y ángulos en cualquier triángulo plano.

Los triángulos esféricos se forman en la superficie de una esfera y son objeto de estudio de la trigonometría esférica, la cual se aplica en la náutica y navegación.

Funciones trigonométricas

A las razones que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama funciones o razones trigonométricas.

Definiciones

Seno de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Cotangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

Secante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

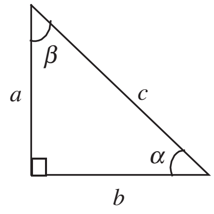
Cosecante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Nota: los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina los catetos opuesto y adyacente para cada uno de los ángulos agudos.



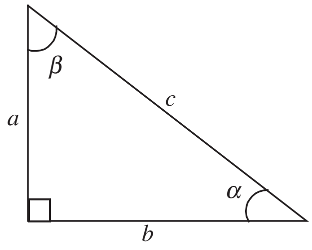
Solución

Para el ángulo α:
cateto opuesto = a
cateto adyacente = b
hipotenusa = c

Para el ángulo β:
cateto opuesto = b
cateto adyacente = a
hipotenusa = c

El cateto que es opuesto para uno de los ángulos será el adyacente para el otro, siendo la hipotenusa el lado que no presenta variante.

2 Obtén las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



Solución

En el triángulo la hipotenusa es c y los catetos son a y b, entonces las funciones para los ángulos agudos α y β son:

Funciones de α:	**Funciones de β:**
$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$	$sen\,\beta = \frac{b}{c}$
$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$	$cos\,\beta = \frac{a}{c}$
$tan\,\alpha = \frac{a}{b}$	$tan\,\beta = \frac{b}{a}$
$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$	$ctg\,\beta = \frac{a}{b}$
$sec\,\alpha = \frac{c}{b}$	$sec\,\beta = \frac{c}{a}$
$csc\,\alpha = \frac{c}{a}$	$csc\,\beta = \frac{c}{b}$

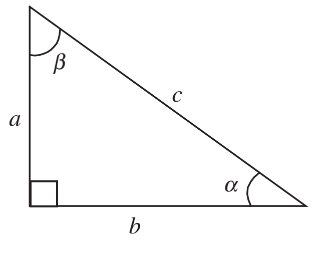
Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo guardan ciertas relaciones entre sí:

Función directa			**Función recíproca**	
seno	(*sen*)	⟷	*cosecante*	(*csc*)
coseno	(*cos*)	⟷	*secante*	(*sec*)
tangente	(*tan*)	⟷	*cotangente*	(*ctg*)

Cofunciones

Cualquier función de un ángulo es igual a la cofunción de su complemento.

En el triángulo rectángulo:



Por geometría:
$90° + \alpha + \beta = 180°$
Donde:
$\alpha + \beta = 90°;\ \beta = 90° - \alpha$
por tanto, α y β son complementarios.

Entonces, mediante las definiciones:

$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha) = cos\ \beta$$
$$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha) = sen\ \beta$$
$$tan\ \alpha = ctg\ (90° - \alpha) = ctg\ \beta$$
$$ctg\ \alpha = tan\ (90° - \alpha) = tan\ \beta$$
$$sec\ \alpha = csc\ (90° - \alpha) = csc\ \beta$$
$$csc\ \alpha = sec\ (90° - \alpha) = sec\ \beta$$

Ejemplos

Dadas las funciones trigonométricas, se determinan sus respectivas cofunciones:

$$sen\ 32° = cos\ (90° - 32°) = cos\ 58°$$

$$tan\ 25° = ctg\ (90° - 25°) = ctg\ 65°$$

$$cos\ \frac{\pi}{3} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\ \frac{\pi}{6}$$

$$sec\ \frac{\pi}{4} = csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = csc\ \frac{\pi}{4}$$

Rango numérico

Dado que la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es mayor que cualquiera de los dos catetos, los valores del seno y el coseno de un ángulo agudo no pueden ser mayores que +1, ni menores que –1, mientras que los valores de las funciones cosecante y secante, al ser recíprocas del seno y coseno, no pueden estar entre –1 y +1; los catetos de un triángulo rectángulo pueden guardar entre sí cualquier proporción, por tanto, los valores de la tangente y la cotangente varían sobre todo el conjunto de números reales.

Valor

Dada una función trigonométrica de un ángulo agudo se pueden determinar las demás funciones a partir de la construcción de un triángulo rectángulo y el empleo del teorema de Pitágoras como a continuación se ilustra.

EJEMPLOS

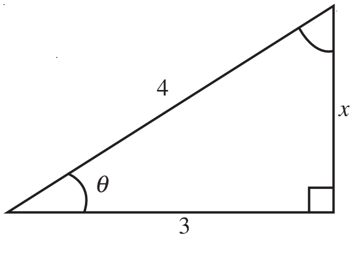
Ejemplos

1 Si θ es agudo, y $cos\ \theta = \frac{3}{4}$, calcula los valores de las funciones trigonométricas para θ.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo, donde θ es uno de los ángulos agudos, la hipotenusa es 4 y el cateto adyacente es 3.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:



$$(4)^2 = (x)^2 + (3)^2$$
$$16 = x^2 + 9$$
$$16 - 9 = x^2$$
$$7 = x^2$$
$$\sqrt{7} = x$$

Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ son:

$$sen\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad ctg\ \theta = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad csc\ \theta = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$tan\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad sec\ \theta = \frac{4}{3}$$

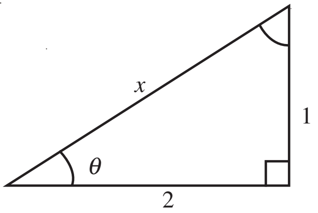
2 Si θ es agudo y $tan\ \theta = \frac{1}{2}$, calcula los valores de seno y coseno del ángulo θ.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo, donde θ es uno de los ángulos agudos, el cateto opuesto es 1 y el cateto adyacente es 2.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:

$$(x)^2 = (1)^2 + (2)^2$$
$$x^2 = 1 + 4$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

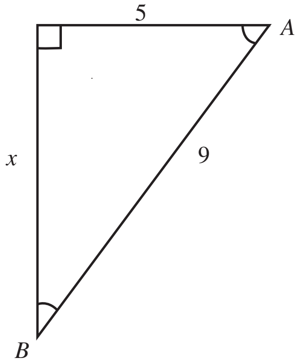


Por consiguiente, $sen\ \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $cos\ \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

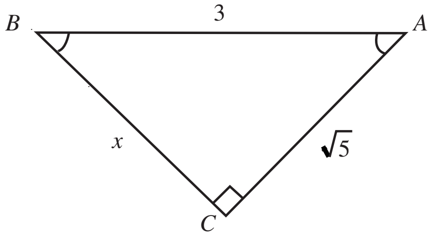
EJERCICIO 37

1. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, en los siguientes triángulos:

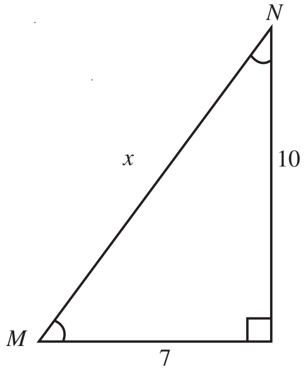
a)



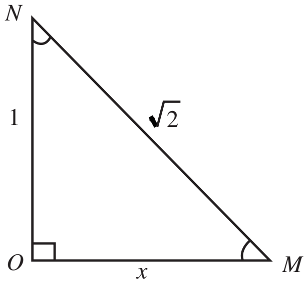
c)



b)



d)



2. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos:

a) Si θ y α son los ángulos agudos y $cos\ \theta = \frac{1}{5}$

b) Si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios y $tan\ B = \frac{2}{3}$

c) Si $\angle M$ y $\angle N$ son complementarios y $csc\ N = 2$

d) Si θ y α son los ángulos agudos y $sec\ \theta = 2\sqrt{3}$

e) Si $\alpha + \beta = 90°$ y $ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

f) sen $A = \frac{4}{\sqrt{29}}$ y $\angle B$ es complemento de $\angle A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Si un triángulo rectángulo se ubica en el plano cartesiano, de manera que uno de sus catetos coincida con el eje horizontal, las funciones trigonométricas tendrán un signo dependiendo del cuadrante sobre el cual se encuentre dicho triángulo.

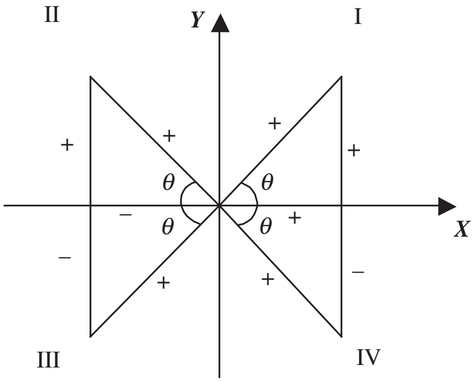


Tabla de signos

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–
Cotangente	+	–	+	–
Secante	+	–	–	+
Cosecante	+	+	–	–

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea el punto $A(-3, 4)$, determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = \angle X\,O\,A$.

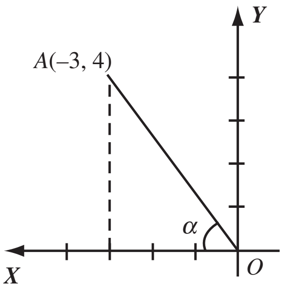
Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = (-3)^2 + (4)^2$$

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = 9 + 16$$

$$\overline{OA} = \sqrt{25} = 5$$



Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo α, son:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} \qquad tan\ \alpha = -\frac{4}{3} \qquad sec\ \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$cos\ \alpha = -\frac{3}{5} \qquad ctg\ \alpha = -\frac{3}{4} \qquad csc\ \alpha = \frac{5}{4}$$

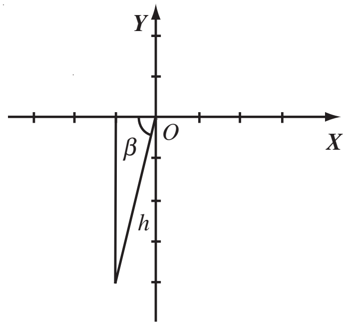
2 Calcula las funciones trigonométricas para el ángulo β, si se sabe que $tan\ \beta = 4$ y $180° \leq \beta \leq 270°$.

Solución

El ángulo se define en el tercer cuadrante y la función tangente es positiva, por tanto, $tan\ \beta = \frac{4}{1} = \frac{-4}{-1}$, estos valores se ubican en el plano cartesiano.

Por el teorema de Pitágoras:

$$(h)^2 = (-4)^2 + (-1)^2$$
$$h^2 = 16 + 1$$
$$h = \sqrt{17}$$



Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo β son:

$$sen\ \beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad tan\ \beta = 4 \qquad csc\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

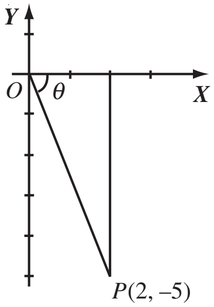
$$cos\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad ctg\ \beta = \frac{1}{4} \qquad sec\ \beta = -\sqrt{17}$$

3 Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ que forman el punto $P(2, -5)$ y el eje horizontal.

Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 = (2)^2 + (-5)^2$$
$$\overline{OP} = \sqrt{4+25}$$
$$\overline{OP} = \sqrt{29}$$



Las funciones trigonométricas son:

$$sen\ \theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29} \quad tan\theta = -\frac{5}{2} \quad sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} \quad ctg\theta = -\frac{2}{5} \quad csc\theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

EJERCICIO 38

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = < XOM$ que forman el punto $M(12, -5)$ y el eje horizontal.
2. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = YON$ que forman el punto $N(-4, -7)$ y el eje vertical.
3. Determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\beta = XOA$ que forman el punto $A(2, 3)$ y el eje horizontal.
4. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\omega = XOB$ que forman el punto $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y el eje horizontal.
5. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo α, si se encuentra en el tercer cuadrante con $csc\ \alpha = -\frac{3}{2}$
6. Determina las funciones trigonométricas del ángulo α, si se encuentra en el cuarto cuadrante con $ctg\ \alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}$
7. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo β, si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{9}{13}$ y $90° \le \beta \le 180°$
8. Obtén las funciones trigonométricas del ángulo ω, si se sabe que $ctg\ \omega = -8$ y $\frac{3\pi}{2} \le \omega \le 2\pi$
9. Si $csc\ \delta = \frac{13}{5}$ si $90° \le \delta \le 180°$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo δ
10. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo β si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\pi \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$
11. Si $sen\ \alpha > 0$, $tan\ \alpha < 0$ y $sec\ \alpha = -2$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo α
12. Si $sec\ \alpha > 0$, $ctg\ \alpha < 0$ y $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo α

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones trigonométricas para ángulos mayores que 90°

Todo ángulo mayor que 90°, se puede expresar en la forma $(n \cdot 90° \pm \alpha)$ o bien $\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, donde n es un entero positivo y α es un ángulo cualquiera, la función de dicho ángulo será equivalente a:

i) La misma función de α si n es un número par.
ii) La cofunción correspondiente de α si n es un número impar.

Esto con el fin de expresar la función trigonométrica de dicho ángulo en una expresión equivalente, pero con un ángulo agudo, conservando el signo correspondiente a la función dada, según el cuadrante donde se encuentre el lado terminal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa como función de un ángulo agudo *tan* 140°.

Solución

El ángulo se sitúa en el segundo cuadrante, donde la función tangente es negativa, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (2 \cdot 90° - 40°) = -tan\ 40°$$

Ahora bien, *tan* 140° se puede expresar también como *tan* (1 · 90° + 50°), $n = 1$, por tanto se utiliza cotangente, la cual es cofunción de la tangente, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (1 \cdot 90° + 50°) = -ctg\ 50°$$

2 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\ \frac{11}{9}\pi$.

Solución

El ángulo está en el tercer cuadrante, donde la función seno es negativa, entonces:

$$sen\ \frac{11}{9}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{9}\pi\right) = -sen\ \frac{2}{9}\pi$$

$sen\ \frac{11}{9}\pi$ se puede representar también como $sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right)$, $n = 3$ por tanto se utiliza la cofunción del seno, es decir, se expresa en términos del coseno.

$$sen\ \frac{11}{9}\pi = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right) = -cos\ \frac{5}{18}\pi$$

3 Expresa como función de un ángulo agudo *sec* 350° 15' 28".

Solución

El ángulo está situado en el cuarto cuadrante donde la función secante es positiva, entonces:

$$sec\ 350° 15' 28'' = sec\ (4 \cdot 90° - 9° 44' 32'') = sec\ 9° 44' 32''$$

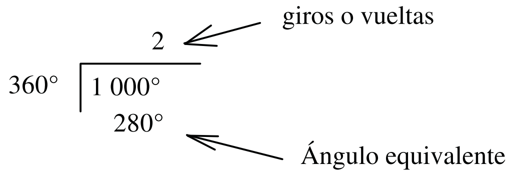
O en términos de cosecante:

$$sec\ 350° 15' 28'' = sec\ (3 \cdot 90° + 80° 15' 28'') = csc\ 80° 15' 28''$$

4 Expresa como función de un ángulo agudo *cos* 1 000°.

Solución

Cuando el ángulo es mayor que 360°, debe dividirse entre esta cantidad para obtener el número de giros o vueltas que da el lado terminal y el residuo es el ángulo que debe expresarse en función de un ángulo agudo.



El ángulo equivalente a 1 000° es 280°, situado en el cuarto cuadrante donde la función coseno es positiva, entonces:

$$cos\ 1\,000° = cos\ 280° = cos\ (4 \cdot 90° - 80°) = cos\ 80°$$

O bien, en términos de la función seno,

$$cos\ 1\,000° = cos\ 280° = cos\ (3 \cdot 90° + 10°) = sen\ 10°$$

5 Expresa como función de un ángulo agudo *sen* 6 290°.

Solución

Se obtiene el ángulo equivalente, que sea menor que 360°,

$$\begin{array}{r|l} & 17 \\ 360° & 6\,290° \\ & \ \ 170° \end{array}$$

El ángulo equivalente es 170°, el cual se sitúa en el segundo cuadrante donde la función seno es positiva, entonces,

$$sen\ 6\,290° = sen\ 170° = sen\ (2 \cdot 90° - 10°) = sen\ 10°$$

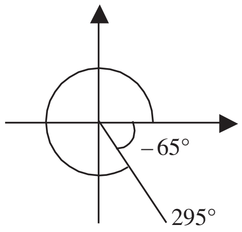
O bien, en términos de coseno,

$$sen\ 6\,290° = sen\ 170° = sen\ (1 \cdot 90° + 80°) = cos\ 80°$$

6 Expresa como función de un ángulo agudo $tan\ (-65°)$.

Solución

Se traza el ángulo negativo, el cual girará en sentido horario y será equivalente a un ángulo de 295°, que se sitúa en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa.



Por consiguiente:

$$tan\ (-65°) = tan\ 295° = tan\ (4 \cdot 90° - 65°) = -tan\ 65°$$

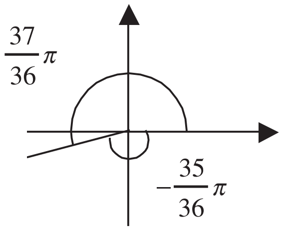
O bien, en términos de cotangente:

$$tan\ (-65°) = tan\ 295° = tan\ (3 \cdot 90° + 25°) = -ctg\ 25°$$

7 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right)$

Solución

Se traza el ángulo negativo, el cual se encuentra en el tercer cuadrante donde la función seno es negativa.



Por tanto,

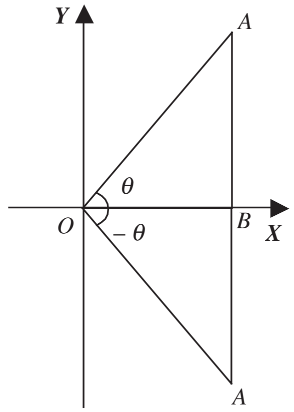
$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\ \frac{37}{36}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{36}\right) = -sen\ \frac{\pi}{36}$$

O bien, en términos de coseno:

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\ \frac{37}{36}\pi = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{17}{36}\pi\right) = -cos\ \frac{17}{36}\pi$$

Funciones trigonométricas de ángulos negativos

Los ángulos negativos giran en sentido horario y las funciones trigonométricas de ángulos negativos, se expresan en términos de funciones trigonométricas de ángulos positivos.



En el triángulo Δ *AOB*, ubicado en el primer cuadrante:

$$sen\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \qquad tan\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \qquad sec\ \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$$

$$cos\ \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \qquad ctg\ \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} \qquad csc\ \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

En el triángulo Δ *AOB,* ubicado en el cuarto cuadrante:

$$sen\ (-\theta) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \qquad tan\ (-\theta) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \qquad sec\ (-\theta) = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$$

$$cos\ (-\theta) = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \qquad ctg\ (-\theta) = -\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} \qquad csc\ (-\theta) = -\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

Por consiguiente: $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$ $\quad tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ $\quad sec\ (-\theta) = sec\ \theta$

$cos\ (-\theta) = cos\ \theta$ $\quad ctg\ (-\theta) = -ctg\ \theta$ $\quad csc\ (-\theta) = -csc\ \theta$

EJEMPLOS

1 Expresa *sen* (–30°) en términos de un ángulo positivo.

Solución

Al aplicar $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$, se obtiene:

$$sen\ (-30°) = -sen\ 30°$$

2 Expresa *tan* (–120°) en términos de un ángulo positivo y agudo.

Solución

Se aplica $tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ y se obtiene:

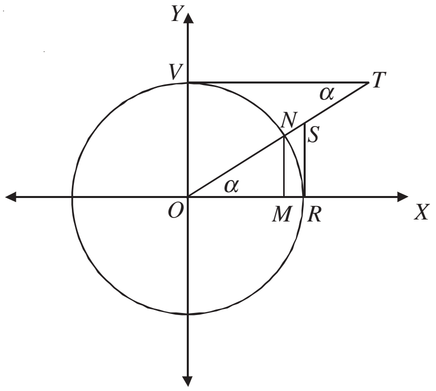
$$tan\ (-120°) = -tan\ 120°$$

y al reducir a un ángulo agudo,

$$tan\ (-120°) = -tan\ 120° = -tan\ (2 \cdot 90° - 60°) = -(-tan\ 60°) = tan\ 60°$$

Valores numéricos de las funciones trigonométricas circulares

Los valores de las funciones trigonométricas guardan una estrecha relación con el círculo unitario y se pueden calcular por medio de la medición de algunos segmentos de éste, el uso de tablas matemáticas o con el empleo de una calculadora.



Si se consideran las distancias $\overline{OR}=\overline{ON}=\overline{OV}=1$, entonces para calcular el valor de las funciones trigonométricas del ángulo α, se emplean las definiciones de las mismas y representan la longitud de los segmentos:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{MN}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{MN}}{1} = \overline{MN}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$

$$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{VT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{VT}}{1} = \overline{VT}$$

$$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \overline{OS}$$

$$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

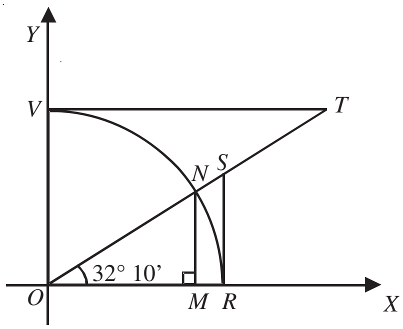
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de las funciones trigonométricas del ángulo 32° 10'.

Solución

Si se emplea el círculo unitario para calcular las funciones, donde α = 32° 10', entonces:



Se consideran los segmentos $\overline{OR} = \overline{ON} = \overline{OV} = 1$, entonces:

sen 32° 10' = $\overline{MN}$ = 0.5324

cos 32° 10' = $\overline{OM}$ = 0.8465

tan 32° 10' = $\overline{SR}$ = 0.6289

csc 32° 10' = $\overline{OT}$ = 1.8783

sec 32° 10' = $\overline{OS}$ = 1.1813

ctg 32° 10' = $\overline{VT}$ = 1.5900

Si se emplean las tablas matemáticas (incluidas al final del texto) para calcular el valor de las funciones trigonométricas de 32° 10', entonces, se procede de la siguiente forma:

Grados	Radianes	Sen	Tan	Ctg	Cos		
0° 00'	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00'
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32° 00'	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00'
10'	.5614	**.5324**	**.6289**	**1.5900**	**.8465**	1.0094	50'
20'	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0065	40'
30'	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0036	30'
40'	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20'
50'	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10'
33° 00'	.5760	.5446	.6494	1.5399	.9387	.9948	57° 00'
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
45° 00'	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00'
		Cos	Ctg	Tan	Sen	Radianes	Grados

El renglón superior corresponde a la columna izquierda cuyos valores van desde 0° 00' a 45° 00' y el renglón inferior va desde 45° 00' a 90° 00'.

El valor de *sen* 32° 10' se busca en la columna izquierda de arriba hacia abajo y además se observa que es el mismo valor que el de *cos* 57° 50', buscado en la columna derecha de abajo hacia arriba, esto es porque son cofunciones.

Si se busca el valor de las funciones trigonométricas empleando una calculadora, el procedimiento es el siguiente:

a) Verificar si la calculadora es de renglón simple o es más sofisticada y cuenta con doble renglón. Esto es porque se teclea de forma diferente; en la explicación que a continuación se presenta se considera que el estudiante empleará una máquina de doble renglón.
b) Es necesario definir en qué medidas angulares se desea trabajar (grados o radianes).
c) Considerar que el idioma que regularmente emplean los fabricantes en los menús y teclados es el inglés, es por ello que el ejemplo así lo considera.
d) Para encontrar las funciones cosecante, secante y cotangente, es necesario encontrar primero sus respectivas funciones recíprocas, ya que las calculadoras no cuentan con estas funciones de manera directa, y después dividir la unidad entre dicho resultado.

Si se emplea la medida en grados debes digitar la tecla de Mode y elegir la opción Deg, la cual indica que la medida angular está en grados sexagesimales.

Si se busca el *sen* 32° 10', entonces:

Se digita sin después, el valor de los grados 32 a continuación la tecla ° ' " enseguida 10 y por último la tecla ° ' ". Para que el resultado aparezca en la pantalla es necesario digitar la tecla = y el resultado desplegado en la pantalla de la calculadora es 0.53238389.

Si la función buscada es *sec* 32° 10', ésta no puede ser calculada de forma directa, por lo que es necesario encontrar su función recíproca. Además, ahora vamos a usar la medida angular en radianes, por tanto:

Se digita Mode y se elige la opción Rad, la cual indica que la medida angular empleada está en radianes, 32° 10' = 0.5614 *rad.*

Se comienza digitando un paréntesis (, en seguida la función recíproca de la secante, la cual es el coseno cos de 0.5614, después se cierra el paréntesis) y por último la tecla x^{-1}, la cual es la función recíproca. Para que aparezca el resultado se teclea = y se desplegará en la pantalla 1. 1813.

EJERCICIO 39

1. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

a) *sen* 210°
b) *tan* 165°
c) *cos* 280°
d) *csc* 120°
e) *sec* 358°
f) *sen* 240° 37’25”
g) *ctg* 315°
h) *tan* 254° 46’24”
i) *cos* 95° 25’
j) *sec* 320° 48’12”
k) *csc* 127°
l) *ctg* (–48°)
m) *cos* (–38° 54’)
n) *sen* (–28° 35’24”)

2. Expresa en términos de un ángulo positivo las siguientes funciones:

a) *sen* (–160°)
b) *ctg* (–140°)
c) *sec* (–240°)
d) *cos* (–280°)
e) *tan* (–345°)
f) *csc* (–90°)
g) *cos* (–225° 15’ 46”)
h) *ctg* (–176° 45’ 23”)
i) *sec* (–108° 32’)
j) *sen* (–228° 15’)

3. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

a) *sen* (–160°)
b) *ctg* 1 240°
c) *cos* (–2 800°)
d) *tan* 5 445°
e) *csc* (–98° 32’ 12”)
f) *sec* (–230°)
g) *sen* (1 315°)
h) *tan* 823° 25’ 18”
i) *cos* (–428° 45’ 24”)
j) *ctg* 920°
k) *sec* (–220°)
l) *csc* 328° 33’ 41”

4. Encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas (empleando tablas o calculadora):

a) *sen* 18°
b) *ctg* 46°
c) *sec* 25°
d) *cos* 83°
e) *tan* 37°
f) *csc* 79°
g) *cos* 22° 10’
h) *ctg* 14° 40’
i) *sec* 10° 30’
j) *sen* 29° 50’

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 12

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS NOTABLES

Reseña HISTÓRICA

Ptolomeo
(100 *d. C.* – 170 *d. C.*)

Astrónomo, matemático y geógrafo egipcio del siglo II de la era cristiana, nace en Tolemaida Hermia (en el Alto Egipto), alrededor del año 100, y vive y trabaja en Alejandría.

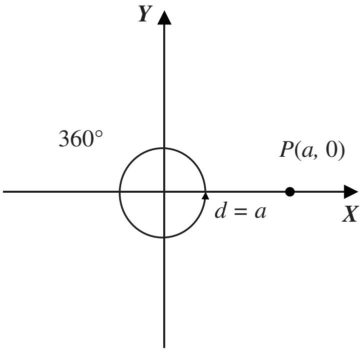
Ptolomeo calculó cuerdas inscribiendo polígonos regulares de lados 3, 4, 5 y 6 en un círculo, lo cual le permitió calcular cuerdas subtendidas por ángulos de 36°, 72°, 60°, 90° y 120°. En su obra *Almagesto*, Ptolomeo proporcionó una tabla de cuerdas de 0° a 180° con variaciones de 1°, con una exactitud de 1/3 600 de una unidad.

Los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno, en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ (radio de la circunferencia) y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.

Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Las coordenadas del punto P sobre el eje X son $(a, 0)$ y la distancia al origen es igual a a, entonces las funciones de los ángulos de 0° y 360° son:



$$sen\ 0° = sen\ 360° = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos\ 0° = cos\ 360° = \frac{a}{a} = 1$$

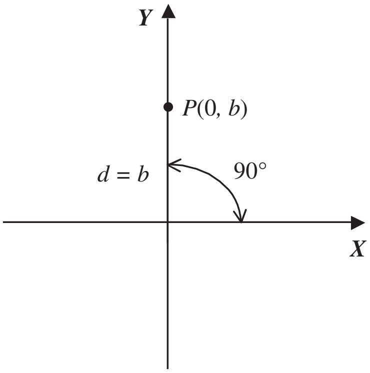
$$tan\ 0° = tan\ 360° = \frac{0}{a} = 0$$

$$ctg\ 0° = ctg\ 360° = \frac{a}{0} \text{ No existe}$$

$$sec\ 0° = sec\ 360° = \frac{a}{a} = 1$$

$$csc\ 0° = csc\ 360° = \frac{a}{0} \text{ No existe}$$

Para el ángulo de 90°, las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje Y es $P(0, b)$, la distancia al origen es b, entonces:



$$sen\ 90° = \frac{b}{b} = 1$$

$$cos\ 90° = \frac{0}{b} = 0$$

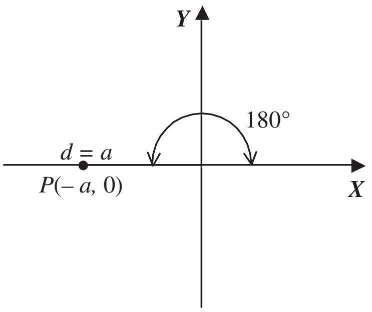
$$tan\ 90° = \frac{b}{0} \text{ No existe}$$

$$ctg\ 90° = \frac{0}{b} = 0$$

$$sec\ 90° = \frac{b}{0} \text{ No existe}$$

$$csc\ 90° = \frac{b}{b} = 1$$

Para el ángulo de 180° las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje $-X$ son $(-a, 0)$, la distancia al origen es a.



$$sen\ 180° = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos\ 180° = \frac{-a}{a} = -1$$

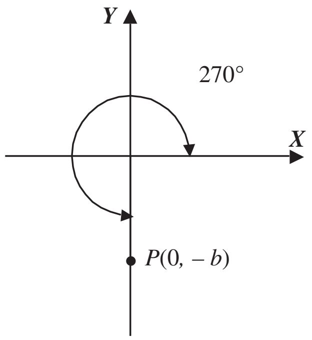
$$tan\ 180° = \frac{0}{-a} = 0$$

$$ctg\ 180° = \frac{-a}{0} \text{ No existe}$$

$$sec\ 180° = \frac{a}{-a} = -1$$

$$csc\ 180° = \frac{a}{0} \text{ No existe}$$

Para el ángulo de 270° las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje $-Y$ son $P(0, -b)$, la distancia al origen es b.



$$sen\ 270° = -\frac{b}{b} = -1$$

$$cos\ 270° = \frac{0}{b} = 0$$

$$tan\ 270° = \frac{-b}{0}\ \text{No existe}$$

$$ctg\ 270° = \frac{0}{-b} = 0$$

$$sec\ 270° = \frac{b}{0}\ \text{No existe}$$

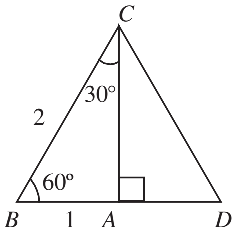
$$csc\ 270° = \frac{b}{-b} = -1$$

Cuadro de valores de las funciones trigonométricas

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Funciones	0°	90°	180°	270°	360°
seno	0	1	0	–1	0
coseno	1	0	–1	0	1
tangente	0	No existe	0	No existe	0
cotangente	No existe	0	No existe	0	No existe
secante	1	No existe	–1	No existe	1
cosecante	No existe	1	No existe	–1	No existe

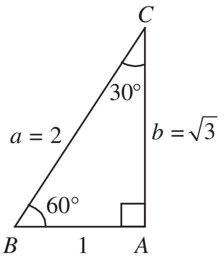
Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

Para las funciones trigonométricas de los ángulos de 60° y 30° se construye un triángulo equilátero de lado igual a 2:



Se traza $\overline{CA} \perp \overline{BD}$, $\overline{CA}$ es bisectriz del $\angle C$ y mediatriz del lado BD.

En el triángulo BAC, $\angle B = 60°$, $\angle ACB = 30°$ y $\overline{BA} = 1$



Para obtener el lado $b = \overline{CA}$ se usa el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CA}^2 = (2)^2 - (1)^2$$

$$\overline{CA}^2 = 3$$

$$\overline{CA} = \sqrt{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad sec\ 60° = \frac{2}{1} = 2$$

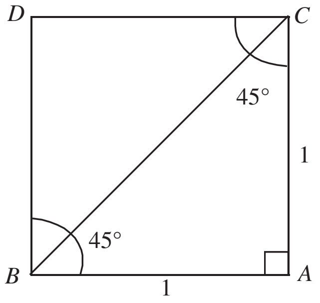
$$cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ctg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad csc\ 30° = \frac{2}{1} = 2$$

Para calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 45° se construye un cuadrado de longitud por lado igual a la unidad y se traza su diagonal.



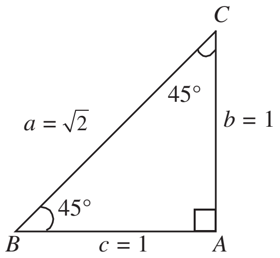
Para obtener el valor de la hipotenusa, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{donde:} \quad a^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$a^2 = 1 + 1$$

$$a^2 = 2$$

De acuerdo con el resultado anterior, $a = \sqrt{2}$



Las funciones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad sec\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ctg\ 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad csc\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Aplicación de los valores trigonométricos de los ángulos notables

EJEMPLOS

1 Calcula el valor numérico de 2 *sen* 30° *cos* 60°.

Solución

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se efectúa la operación:

$$2\,sen\,30° \cdot cos\,60° = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Determina el valor numérico de la expresión: $tan^2\,60° + ctg^2\,45°$.

Solución

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se determina que:

$$tan^2\,60° + ctg^2\,45° = (tan\,60°)^2 + (ctg\,45°)^2 = (\sqrt{3}\,)^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, $tan^2\,60° + ctg^2\,45° = 4$

3 Calcula el valor numérico de $sen\,\frac{7}{6}\pi + 3\,sen\,\frac{11}{6}\pi$.

Solución

Los ángulos se expresan en función de ángulos agudos para obtener los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\,\frac{7}{6}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\,sen\,\frac{\pi}{6} = -\,\frac{1}{2}$$

$$sen\,\frac{11}{6}\pi = sen\left(4\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = -\,sen\,\frac{\pi}{6} = -\,\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$sen\,\frac{7}{6}\pi + 3\,sen\,\frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Por tanto, sen $\frac{7}{6}\pi + 3\,sen\,\frac{11}{6}\pi = -2$

4 Mediante ángulos notables demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\,30° - (cos\,30° \cdot ctg\,60°)^2 = cos^2\,60°$$

Solución

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\,30° = \frac{1}{2}; \qquad cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad ctg\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad cos\,60° = \frac{1}{2}$$

Después se sustituyen los valores de las funciones y se demuestra que se cumple con la igualdad:

$$sen\,30° - (cos\,30° \cdot ctg\,60°)^2 = cos^2\,60°$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Con lo cual queda demostrada la igualdad propuesta.

5 Demuestra la siguiente igualdad, mediante el valor de los ángulos notables:

$$\sqrt{sen^2 \frac{3}{2}\pi + 3\, sec\, 2\pi} = csc\, \frac{\pi}{6}$$

Solución

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ \frac{3}{2}\pi = -1; \quad sec\ 2\pi = 1; \quad csc\ \frac{\pi}{6} = 2$$

Entonces:

$$\sqrt{(-1)^2 + 3(1)} = 2$$
$$\sqrt{1+3} = 2$$
$$\sqrt{4} = 2$$
$$2 = 2$$

Por tanto, la igualdad es verdadera.

EJERCICIO 40

Completa la siguiente tabla:

Grados	Radianes	sen	cos	tan	csc	sec	ctg
0°	0						
30°	$\frac{\pi}{6}$						
45°	$\frac{\pi}{4}$						
60°	$\frac{\pi}{3}$						
90°	$\frac{\pi}{2}$						
120°	$\frac{\pi}{3}$						
135°	$\frac{\pi}{4}$						
150°	$\frac{\pi}{6}$						
180°	π						
210°	$\frac{7\pi}{6}$						
225°	$\frac{5\pi}{4}$						
240°	$\frac{4\pi}{3}$						
270°	$\frac{3\pi}{2}$						
300°	$\frac{5\pi}{3}$						
315°	$\frac{7\pi}{4}$						
330°	$\frac{11\pi}{6}$						
360°	2π						

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

1. $2\,sen\,30°\,cos\,30°$
2. $2\,sen\,30°\,sen\,60°$
3. $3\,tan\dfrac{\pi}{6}\;sen\dfrac{\pi}{3}$
4. $sec^2\,45° - 2\,tan^2\,45°$
5. $sen^2\,30°\,cos^2\,30°$
6. $\left[sen^2 45° cos^2 45°\right]^{\frac{3}{2}}$
7. $3\,tan\,60°\,ctg\,30°\,sen\,45°\,csc\,45°$
8. $2\,sen\,60°\,sec\,30°\,cos\,45°\,tan\,45°$
9. $2\,sen\dfrac{\pi}{4}\;cos\dfrac{\pi}{4}\left(sen^2\dfrac{\pi}{6}+cos^2\dfrac{\pi}{6}\right)$
10. $2\,sen\,30°\,cos\,30°\,(1 - 2\,sen^2\,30°)$
11. $tan^2\dfrac{5}{3}\pi + 4\,sen\dfrac{5}{6}\pi - 3\,ctg^2\dfrac{5}{4}\pi$
12. $\dfrac{cos\,120° + sec\,180°}{csc\,270° + sen\,330°}$
13. $\left[\dfrac{(sen\,120°)(tan\,240°)}{tan\,315° - cos\,300°}\right]^3$
14. $\sqrt{(tan\,225°)(sen\,180°)(cos\,240°)}$
15. $sen\,90° + (cos\,210° + sen\,300°)^2 + sec\,240°$

Utiliza ángulos notables para demostrar las siguientes igualdades:

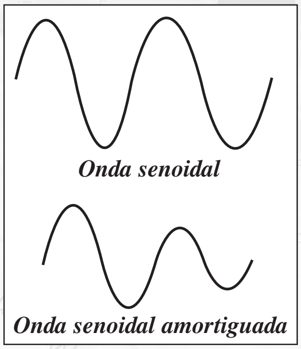
16. $\dfrac{sen\,240° + sen\,120°\cdot cos\,60°}{sen\,120°\cdot sen(-60°)} = tan\,210°$
17. $tan\dfrac{\pi}{3}\cdot sen\dfrac{2}{3}\pi = 1 + sen\dfrac{\pi}{6}$
18. $sen\,180° = 2\,sen\,60° + sen\,240°(sec\,45°)^2$
19. $cos\,225° + 3\,sen\,225° = -2\,sec\,45°$
20. $csc\,60° = -\dfrac{sen\,30°}{sen\,150°\cdot sen\,300°}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 13

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ondas SENOIDALES



Se les considera como fundamentales por diversas razones: poseen propiedades matemáticas muy interesantes (un ejemplo, con combinaciones de señales senoidales de diferente amplitud y frecuencia se puede reconstruir cualquier forma de onda), la señal que se obtiene de las tomas de corriente de cualquier casa tiene esta forma, las señales de test producidas por los circuitos osciladores de un generador de señal también son senoidales, la mayoría de las fuentes de potencia en AC (corriente alterna) producen señales senoidales.

La señal senoidal amortiguada es un caso especial de este tipo de ondas y se produce en fenómenos de oscilación, pero que no se mantienen en el tiempo.

Gráficas de las funciones trigonométricas

Al establecer una regla de correspondencia entre dos conjuntos, por medio de las funciones trigonométricas, se establecen relaciones como:

$$y = sen\ x,\ f(x) = cos\ (-x),\ y = tan\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Para construir la gráfica de una función o razón trigonométrica se dan valores al ángulo (Argumento), éstos van sobre el eje x, los valores obtenidos se grafican sobre el eje y.

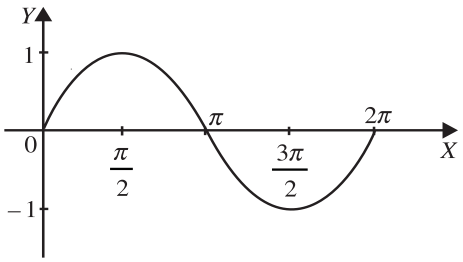
Los valores asignados para el argumento se expresan en grados sexagecimales o radianes.

Gráfica de $y = sen\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0

Gráfica



Características

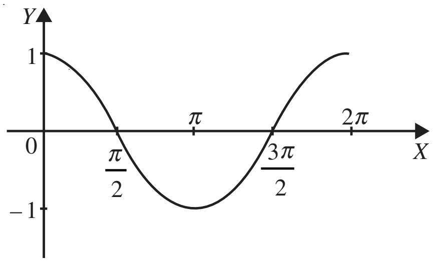
1. La función tiene periodo igual a 2π *rad.*
2. La función es creciente en el primero y cuarto cuadrantes.
3. La función decrece en el segundo y tercer cuadrantes.
4. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes y negativa en el tercero y cuarto cuadrantes.
5. La función interseca al eje horizontal en múltiplos enteros de π.
6. $-\infty < x < \infty$.
7. $-1 \leq y \leq 1$.

Gráfica de $y = \cos x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	1	0.7	0	– 0.7	– 1	– 0.7	0	0.7	1

Gráfica



Características

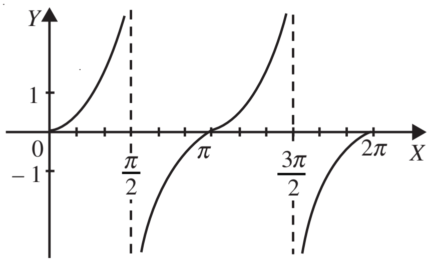
1. La función tiene periodo igual a 2π *rad*.
2. La función decrece en el primero y segundo cuadrantes.
3. La función crece en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes, y negativa en el segundo y tercer cuadrantes.
5. La función interseca al eje horizontal en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
6. $-\infty < x < \infty$.
7. $-1 \leq y \leq 1$.

Gráfica de $y = \tan x$

Tabulación

	1o. cuadrante			2o. cuadrante			3o. cuadrante			4o. cuadrante			
X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	0	0.57	1.7	No existe	–1.7	–0.57	0	0.57	1.7	No existe	– 1. 7	–0.57	0

Gráfica



Características

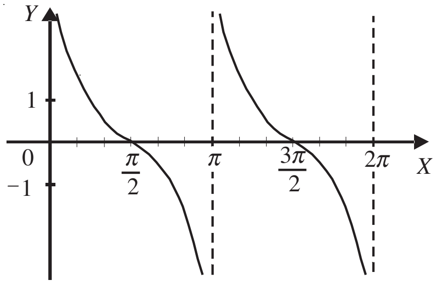
1. La función interseca al eje *X* en múltiplos de π.
2. La función es positiva en el primero y tercer cuadrantes.
3. La función es negativa en el segundo y cuarto cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a π *rad*.
5. x es un número real tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $-\infty < y < \infty$.

Gráfica de $y = ctg\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante				2o. cuadrante		3o. cuadrante			4o. cuadrante			
X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	No existe	1.7	0.57	0	–0.57	–1.7	No existe	1.7	0.57	0	– 0.57	–1.7	No existe

Gráfica



Características

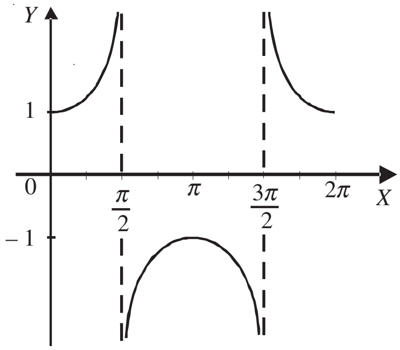
1. La función interseca al eje *X* en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. La función es positiva en el primero y tercer cuadrante.
3. La función es negativa en el segundo y cuarto cuadrante.
4. La función tiene periodo igual a π *rad.*
5. x es un número real tal que $x \neq n\pi$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $-\infty < y < \infty$.

Gráfica de $y = sec\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Y	1	14	No existe	– 1.4	–1	–1.4	No existe	1.4	1

Gráfica



Características

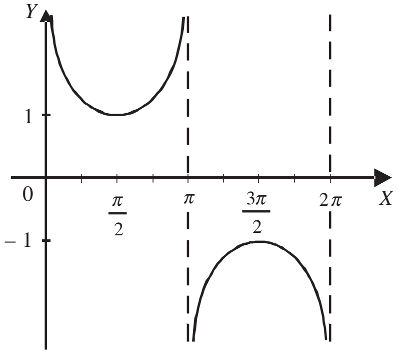
1. La función no interseca al eje *X.*
2. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes.
3. La función es negativa en el segundo y tercer cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a 2π *rad.*
5. x es un número real tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $y \geq 1$ o $y \leq -1$.

Gráfica de $y = csc\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Y	1	1.4	No existe	– 1.4	– 1	–1.4	No existe	1.4	1

Gráfica



Características de la función cosecante

1. La función no interseca al eje X.
2. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes.
3. La función es negativa en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a 2π *rad*.
5. El valor de x es un número real tal que $x \neq n\pi$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $y \geq 1$ o $y \leq -1$.

Resumen

La siguiente tabla muestra el periodo, la amplitud, las asíntotas verticales, el dominio y el rango de cada una de las funciones trigonométricas.

	Periodo	Amplitud	Asíntotas verticales	Valores de *x*	Valores de *y*
$y = sen\ x$	2π	1	No tiene	$\{x \in R\}$	$\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$
$y = cos\ x$	2π	1	No tiene	$\{x \in R\}$	$\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$
$y = tan\ x$	π		$\frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$	$\left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$	$\{y \in R\}$
$y = ctg\ x$	π		$n\pi, n \in Z$	$\{x \in R / x \neq n\pi\}$	$\{y \in R\}$
$y = sec\ x$	2π		$\frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$	$\left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$	$\{y \in R / y \leq -1$ o $y \geq 1\}$
$y = csc\ x$	2π		$n\pi, n \in Z$	$\{x \in R / x \neq n\pi\}$	$\{y \in R / y \leq -1$ o $y \geq 1\}$

Amplitud, periodo y desplazamiento de fase

Si $y = a\ sen\ bx$, o bien $y = a\ cos\ bx$, para $a, b \in R$, distintos de cero, entonces la gráfica tiene amplitud $|a|$, y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 4\ sen\ 2x$.

Solución

De $y = 4\ sen\ 2x$ se obtiene $a = 4$ y $b = 2$, los cuales al sustituir en las fórmulas se determinan la amplitud y el periodo:

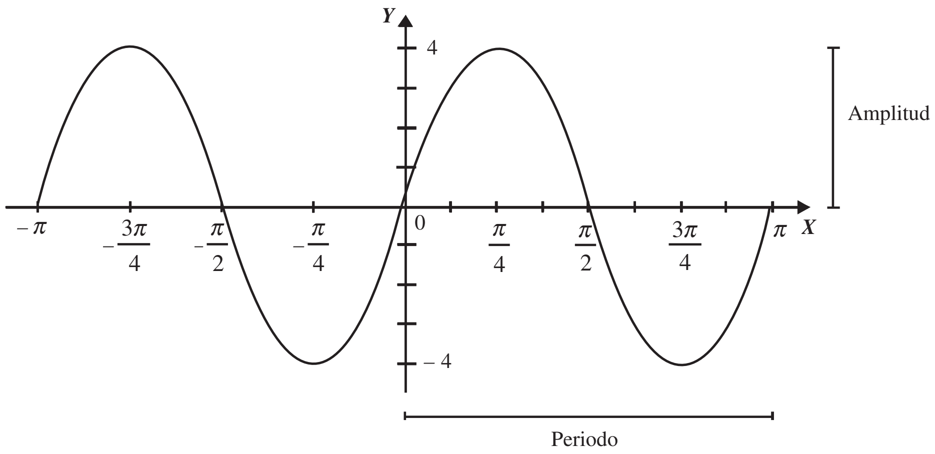
Amplitud: $|a| = |4| = 4$ Periodo: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Luego, la gráfica tiene amplitud 4 y periodo π.

Tabulación

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
Y	0	4	0	– 4	0	4	0	– 4	0

Gráfica



2 Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 2\ sen\ \frac{1}{2}x$.

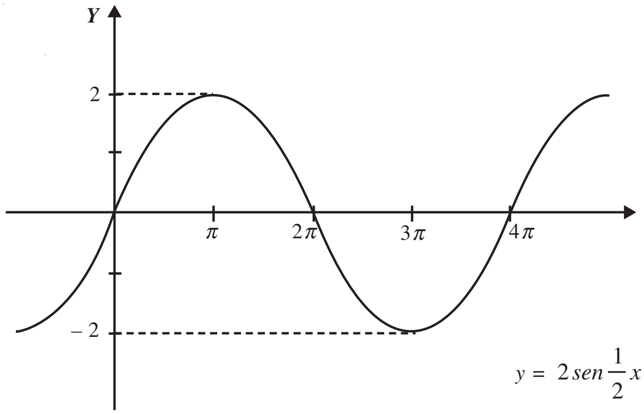
Solución

De $y = 2\ sen\ \frac{1}{2}x$ se obtiene $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, los cuales al sustituirlos en las fórmulas se determinan la amplitud y el periodo:

$$\text{Amplitud: } |a| = |2| = 2 \qquad \text{Periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Entonces, la gráfica tiene amplitud 2 y periodo 4π.

X	Y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1.41
π	2
$\frac{3\pi}{2}$	1.41
2π	0
$\frac{5\pi}{2}$	–1.41
3π	–2
$\frac{7\pi}{2}$	–1.41
4π	0



3 Determina la amplitud y el periodo de $y = \frac{2}{3}cos\frac{1}{3}x$.

Solución

En este caso $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$, por tanto,

$$\text{Amplitud} = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

Entonces, la gráfica tiene amplitud $\frac{2}{3}$ y periodo 6π.

Desplazamiento de fase (desfasamiento)

Caso 1. Si $y = a\ sen\ (b x + c)$, o bien $y = a\ cos\ (b x + c)$ con $a \neq \mathbf{0}$ y $b \neq \mathbf{0}$

El desplazamiento de fase se calcula resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$b x + c = 0 \qquad \text{y} \qquad b x + c = 2\pi$$

Ejemplo

Calcula la amplitud, periodo y desplazamiento de fase y traza la gráfica de:

$$y = 3\ sen\ (2x + \frac{\pi}{2})$$

Solución

$y = 3\ sen\ (2x + \frac{\pi}{2})$, tiene la forma de $y = a\ sen\ (bx + c)$ donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \frac{\pi}{2}$, por consiguiente:

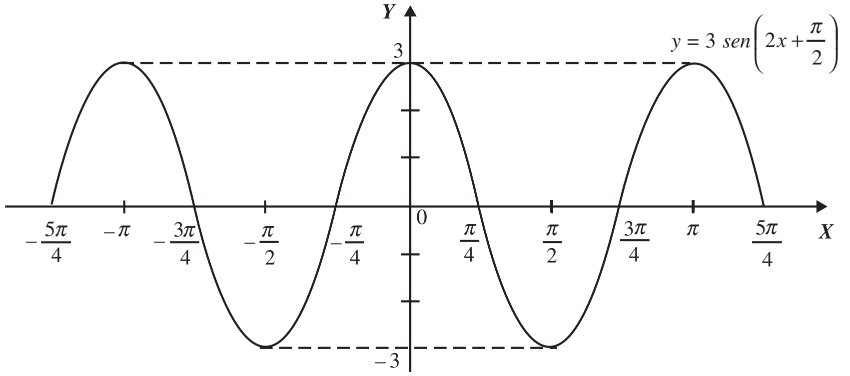
$$\text{Amplitud} = |a| = |3| = 3 \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Para determinar el desplazamiento de fase y el intervalo, se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Donde $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3}{4}\pi$, respectivamente.

X	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
Y	0	3	0	– 3	0	3	0	– 3	0	3	0	– 3	0



➲ **Caso 2.** Si $y = a\ tan\ (bx + c)$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces:

a) El periodo es $\frac{\pi}{|b|}$

Se pueden determinar las asíntotas verticales sucesivas en la gráfica resolviendo las ecuaciones:

$$b\,x + c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad b\,x + c = \frac{\pi}{2}$$

b) El desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$

Ejemplo

Calcula el periodo y traza la gráfica de $y = \frac{1}{2}\ tan\ (x + \frac{\pi}{4})$

Solución

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $c = \frac{\pi}{4}$, entonces,

a) El periodo es $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

b) Para determinar las asíntotas verticales sucesivas se resuelven las ecuaciones:

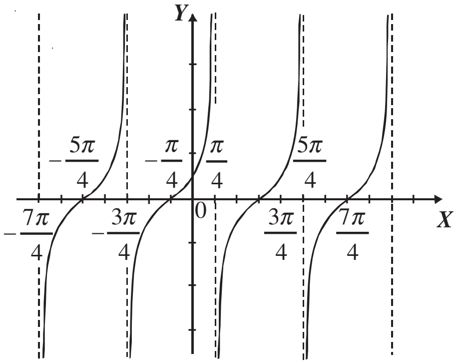
$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Donde $x = -\frac{3}{4}\pi$ y $x = \frac{\pi}{4}$, respectivamente, esto significa que cada π *rad* se traza una asíntota.

c) En la función $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$ tiene la forma de $y = \frac{1}{2}\ tan\ x$, debido a que $c = \frac{\pi}{4}$ y $b = 1$, el desplazamiento de fase se define como $-\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$, por consiguiente, la gráfica se obtiene desplazando $y = \frac{1}{2}\ tan\ x$ hacia la izquierda una distancia de $\frac{\pi}{4}$

Gráfica

Finalmente se traza la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}\ tan\ (x + \frac{\pi}{4})$ con los datos ya obtenidos.



Gráficas de $y = sen^{-1}\ x$, $y = cos^{-1}\ x$, $y = tan^{-1}\ x$

Seno inverso ($y = sen^{-1}\ x$)

Se representa como sen^{-1} y se define como sigue:

$$y = sen^{-1}\,x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = sen\ y$$

donde $-1 \le x \le 1$, $-\infty < y < \infty$

La expresión se puede escribir de las siguientes formas:

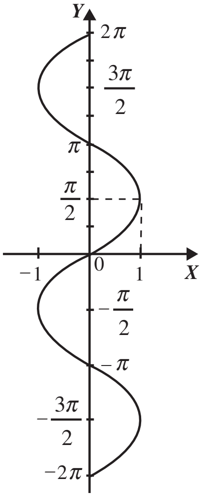
$$y = sen^{-1}\,x = arc\ sen\ x \quad \text{o} \quad y = ang\ sen\ x$$

Las cuales se leen, respectivamente, *arco seno de x* o *ángulo seno de x*.

Tabulación

X	Y
0	$-\pi$
–1	$-\frac{1}{2}\pi$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{4}\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}\pi$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\pi$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}\pi$
1	$\frac{1}{2}\pi$
0	π

Gráfica



Coseno inverso ($y = cos^{-1}x$)

La expresión coseno inverso se define como:

$$y = cos^{-1}x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = cos\ y$$

donde $-1 \leq x < 1$, $-\infty < y < \infty$.

La expresión se puede escribir de la siguiente forma:

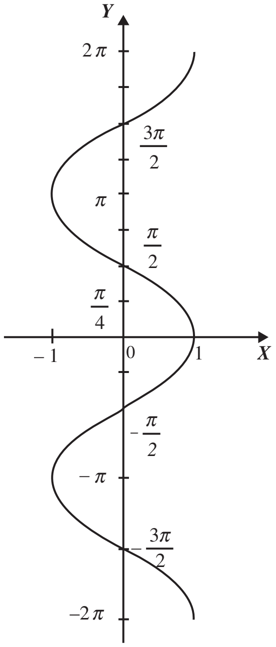
$$y = cos^{-1}\,x = arc\ cos\ x = ang\ cos\ x$$

Las cuales se leen, respectivamente, *arco coseno de x* o *ángulo coseno de x*.

Tabulación

X	Y
–1	π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$
0	$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\pi$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}\pi$
1	0

Gráfica



Tangente inversa ($y = tan^{-1}x$)

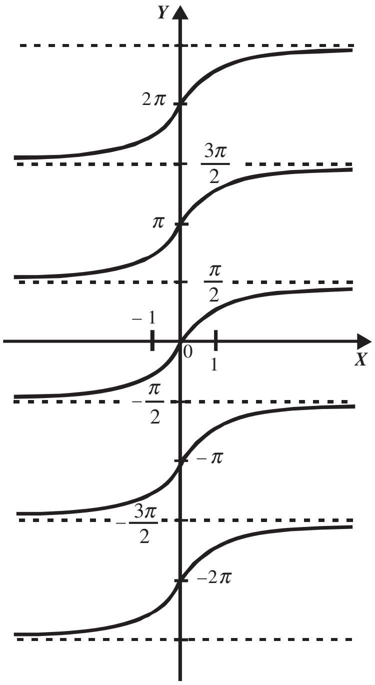
La expresión tangente inversa se define como:

$$y = tan^{-1}x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = tan\ y$$

donde $-\infty < x < \infty$, "y" es un real tal que $y \neq (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$ con $n \in Z$.

La tangente inversa se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = tan^{-1}x = arc\ tan\ x = ang\ tan\ x$$



EJERCICIO 41

Obtén la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de las siguientes funciones:

1. $y = 2\ cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $y = 2\ sen\ 4x$
3. $y = \frac{4}{3} sen\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$
4. $y = 5sen\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. $y = 4cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$
6. $y = -3\ cos\ 2x$
7. $y = \frac{3}{2} sen\left(\frac{1}{2}\pi - 5x\right)$
8. $y = -\frac{1}{3} cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right)$
9. $y = sen\left(\frac{x}{3}\right)$

Calcula el periodo, las asíntotas verticales y el desplazamiento de fase de las siguientes funciones:

10. $y = 3\ tan(2x)$
11. $y = 2\ tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
12. $y = \frac{1}{2} tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$
13. $y = -4\ tan\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$
14. $y = -\frac{3}{2} tan\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$
15. $y = tan\ (x - \pi)$

Traza la gráfica de:

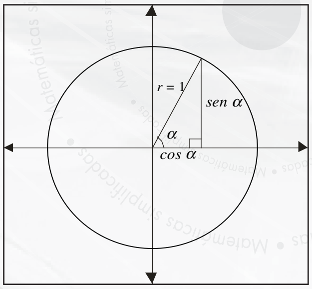
16. $y = \frac{1}{2} sen\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$
17. $y = sen\ 2x$
18. $y = -3\ cos\left(2x + \frac{4}{3}\pi\right)$
19. $y = sen\left(\frac{x}{3}\right)$
20. $y = tan\ 2x$
21. $y = tan\left(\frac{x}{4}\right)$
22. $y = arc\ ctg\ x$
23. $y = sec^{-1}x$
24. $y = ang\ csc\ x$
25. $y = 2 + sen\ 3x$
26. $y = cos(2x) - 3$
27. $y = 1 + 2\ sen\ 4x$
28. $y = sen(3x - \pi)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 14

IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades PITAGÓRICAS



Definiciones de
ángulos del libro
Los elementos de Euclides

Así se denomina a las identidades que resultan del teorema de Pitágoras y se obtienen del círculo unitario mediante un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y catetos con longitudes *sen* α y *cos* α.

Por definición del teorema de Pitágoras:

$$(1)^2 = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2$$

$$1 = sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$$

A la cual se le denomina identidad fundamental.

Identidades trigonométricas

Son igualdades en las que intervienen funciones trigonométricas y es válida para cualquier valor angular.

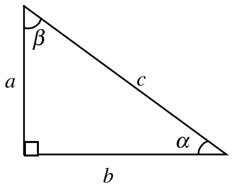
Obtención de las identidades trigonométricas básicas

Para determinar las identidades se hace uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.

En el triángulo las funciones del ángulo α se definen:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \qquad tan\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad csc\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} \qquad ctg\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad sec\ \alpha = \frac{c}{b}$$



Al multiplicar una función directa por cada una de sus recíprocas se obtiene:

$$(sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a\cdot c}{c\cdot a} = 1$$

$$(cos\ \alpha)(sec\ \alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{b\cdot c}{c\cdot b} = 1$$

$$(tan\ \alpha)(ctg\ \alpha) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a\cdot b}{b\cdot a} = 1$$

Por tanto, se deducen las identidades recíprocas.

Identidades recíprocas

$$(sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = 1 \qquad (cos\ \alpha)(sec\ \alpha) = 1 \qquad (tan\ \alpha)\ (ctg\ \alpha) = 1$$

Al realizar los respectivos despejes en las identidades anteriores, se obtienen las siguientes relaciones:

$$sen\ \alpha = \frac{1}{csc\ \alpha} \qquad tan\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha} \qquad csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$cos\ \alpha = \frac{1}{sec\ \alpha} \qquad ctg\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

Identidades de cociente

Si se realiza el cociente de la función seno (*sen* α) por la función coseno (*cos* α), se obtiene la función *tan* α:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a}{b} = tan\ \alpha$$

De manera análoga se obtiene la función cotangente (*ctg* α),

$$\frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b\cdot c}{a\cdot c} = \frac{b}{a} = ctg\ \alpha$$

Por tanto:

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad ; \quad ctg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

Identidades pitagóricas

En el triángulo se aplica el teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2$ Se divide entre c^2 a ambos miembros.

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ Se aplica la ley de los exponentes.

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ Los cocientes son equivalentes a las funciones $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$, por consiguiente $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

En forma semejante se obtienen las demás identidades pitagóricas, entonces:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \quad ; \quad tan^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha \quad y \quad 1 + ctg^2\ \alpha = csc^2\ \alpha$$

De las identidades anteriores se realizan despejes, con el fin de obtener otras identidades:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$	$1 + ctg^2\alpha = csc^2\alpha$
$sen\ \alpha = \pm\sqrt{(1 - cos^2\alpha)}$	$tan\ \alpha = \pm\sqrt{(sec^2\alpha - 1)}$	$ctg\ \alpha = \pm\sqrt{(csc^2\alpha - 1)}$
$cos\ \alpha = \pm\sqrt{(1 - sen^2\alpha)}$	$sec\ \alpha = \pm\sqrt{(tan^2\alpha + 1)}$	$csc\ \alpha = \pm\sqrt{(ctg^2\alpha + 1)}$

Demostración de identidades trigonométricas

Para realizar la demostración de una identidad trigonométrica se aplican procesos algebraicos como la factorización, las operaciones entre fracciones así como su simplificación, además de las identidades trigonométricas básicas.

La aplicación de estos procesos depende de la identidad en sí; esto significa que no existe un orden o procedimiento específico, debido a esta situación sugerimos iniciar con el lado más complejo o elaborado de la igualdad, con el fin de llegar a demostrar el lado más sencillo, como a continuación se ejemplifica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente identidad: $sen\ x = \frac{cos\ x}{ctg\ x}$

Demostración

Se trabaja del segundo hacia el primer miembro, se sustituye $ctg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$ y realiza el cociente correspondiente:

$$sen\ x = \frac{cos\ x}{ctg\ x} \quad \rightarrow \quad sen\ x = \frac{cos\ x}{\frac{cos\ x}{sen\ x}} \quad \rightarrow \quad sen\ x = \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{cos\ x}$$

$$sen\ x \equiv sen\ x$$

Por tanto queda demostrada la identidad.

2 Demuestra la siguiente identidad: $sen\,\beta + cos\,\beta\; ctg\,\beta = csc\,\beta$

Demostración

Para esta identidad se trabaja con el primer miembro para obtener el segundo.

$sen\,\beta + cos\,\beta\; ctg\,\beta = csc\,\beta$ se utiliza la identidad del cociente $ctg\,\beta = \dfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta}$

$sen\,\beta + cos\,\beta \cdot \dfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se efectúa el producto.

$sen\,\beta + \dfrac{cos^2\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se realiza la suma fraccionaria.

$\dfrac{sen^2\beta + cos^2\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se sustituye la identidad pitagórica $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$

$\dfrac{1}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se aplica $\dfrac{1}{sen\,\beta} = csc\,\beta$

$csc\,\beta \equiv csc\,\beta$

Finalmente, queda demostrada la identidad.

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{csc\,\alpha}{tan\,\alpha + ctg\,\alpha} = cos\,\alpha$$

Demostración

Se utiliza el primer miembro de la igualdad y se realizan los siguientes cambios:

$$\frac{csc\,\alpha}{tan\,\alpha + ctg\,\alpha} = cos\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{sen\,\alpha}}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}} = cos\,\alpha$$

Se realiza la suma del denominador, $\dfrac{\frac{1}{sen\,\alpha}}{\frac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot}} = cos\,\alpha$

Y posteriormente la división, $\dfrac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha \cdot (sen^2\alpha + cos^2\alpha)} = cos\,\alpha$

Se sustituye $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $\dfrac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha\,(1)} = cos\,\alpha$

Y finalmente se simplifica la fracción: $cos\,\alpha \equiv cos\,\alpha$

4 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Demostración

Se utiliza el segundo miembro como base para la demostración:

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$ Se multiplica por el conjugado del numerador.

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)(1-\operatorname{sen} x)}$$ se reemplaza $1-\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x$.

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1-\operatorname{sen} x)}$$ se simplifica la fracción.

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\equiv\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$ se demuestra la identidad.

5 Demuestra la siguiente identidad:

$$2\cos^2 x-1=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

Demostración

En este caso se utiliza el primer miembro para obtener el segundo.

$$2\cos^2 x-1=1-2\operatorname{sen}^2 x$$ Se utiliza la identidad $1=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$.

$$2\cos^2 x-(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

$$2\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$ se simplifican términos semejantes.

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$ se emplea $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$.

$$1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

$$1-2\operatorname{sen}^2 x\equiv 1-2\operatorname{sen}^2 x$$

Por lo que la identidad queda demostrada.

6 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{1+2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$

Solución

Se utiliza el lado izquierdo para demostrar la identidad:

$$\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{1+2sen\,\alpha\cdot\ cos\,\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ Se emplea la identidad $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$$\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{sen^2\alpha+2sen\,\alpha\cdot\ cos\,\alpha+cos^2\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ se factoriza denominador y numerador

$$\frac{(cos\,\alpha-sen\,\alpha)(cos\,\alpha+sen\,\alpha)}{(sen\,\alpha+cos\,\alpha)^2}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ se simplifica la fracción

$$\frac{cos\,\alpha-sen\,\alpha}{sen\,\alpha+cos\,\alpha}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$ se divide entre $cos\,\alpha$ numerador y denominador.

$$\frac{\dfrac{cos\,\alpha-sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}{\dfrac{sen\,\alpha+cos\,\alpha}{cos\,\alpha}}=\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}\quad\rightarrow\quad\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}\equiv\frac{1-tan\,\alpha}{1+tan\,\alpha}$$

EJERCICIO 42

Demuestra las siguientes identidades:

1. $sen\,x\,(1 + cot\,x) = sen\,x + cos\,x$
2. $(1 + tan^2 x)\,cos\,x = sec\,x$
3. $\left(\frac{sen\,x}{tan\,x}\right)^2+\left(\frac{1}{csc\,x}\right)^2=1$
4. $(sec\,x + sen^2 x + cos^2 x)(sec\,x - 1) = tan^2 x$
5. $csc\,\theta\,(1 - cos^2\theta) = sen\,\theta$
6. $\frac{ctg\,\alpha}{cos\,\alpha}=csc\,\alpha$
7. $\frac{1-sen^2\phi}{sec^2\phi}=cos^4\phi$
8. $ctg^2 y - cos^2 y = ctg^2 y\,cos^2 y$
9. $sec\,y=\frac{ctg\,y+tan\,y}{csc\,y}$
10. $\frac{1+cos\,\omega}{sen\,\omega}=\frac{sen\,\omega}{1-cos\,\omega}$
11. $sec\,\beta\cdot sen\,\beta\cdot ctg\,\beta = 1$

12. $ctg\ x - tan\ x = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{sen\ x \cdot \cos x}$

13. $2\csc^2 y = \dfrac{1}{1-\cos y} + \dfrac{1}{1+\cos y}$

14. $\dfrac{1}{\csc\alpha + ctg\ \alpha} = \csc\alpha - ctg\ \alpha$

15. $3sen^2 x - 9sen\ x \cdot ctg\ x + 7\cos^2 x - 4\cos x = (4\cos x - 1)(\cos x - 3)$

16. $\cos^2 x + \dfrac{\tan^2 x}{1+\sec x} + sen^2 x = \sec x$

17. $\cos^4 x + sen^2 x + sen^2 x \cos^2 x = 1$

18. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2\csc\beta$

19. $\cos x\,(2\sec x + \tan x)(\sec x - 2\tan x) = 2\cos x - 3\tan x$

20. $1 + \dfrac{sen\ x \cdot ctg^2 x}{1 + sen\ x} = \csc x$

21. $2(sen^6 x + \cos^6 x) - 3(sen^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

22. $sen\ x\,(1 + ctg\ x) = \cos^3 x\,(1 + \tan x) + sen^3 x\,(1 + ctg\ x)$

23. $(\csc x - sen\ x)^2 + (\sec x - \cos x)^2 = \tan^2 x + ctg^2 x - 1$

24. $\dfrac{2 - \csc^2 x}{\tan x - 1} - \csc^2 x + 1 = ctg\ x$

25. $\dfrac{\tan x + ctg\ x}{\csc x - sen\ x} = \sec^3 x$

26. $\dfrac{\cos x - \sec x}{sen\ x - \csc x} = \sec x\,(\sec^2 x - 1)\ sen\ x$

27. $\sec^3 x = \dfrac{\sec^3 x - \sec x \tan^2 x}{(1 - sen\ x)(1 + sen\ x)}$

28. $sen^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

29. $\sec^2 x + \csc^2 x = (\csc x \sec x)^2$

30. $\sec^2 x \equiv sen\ x \csc x + sen\ x\,(sen\ x \sec^2 x)$

31. $\dfrac{1}{\csc x + ctg\ x} - \dfrac{1}{ctg\ x - \csc x} = \dfrac{2}{sen\ x}$

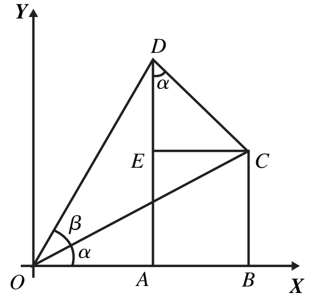
32. $1 - ctg\ x = \sqrt{(\csc^2 x - 2ctg\ x)}$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Obtención de las identidades trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Considerando que $\overline{OB} \perp \overline{BC}$, $\overline{OC} \perp \overline{DC}$, se realiza una proyección de $\overline{OD}$ con el eje X y $\overline{OA} \perp \overline{AD}$, $\overline{DE} \perp \overline{CE}$, donde $\overline{AE} = \overline{BC}$, así como $\overline{AB} = \overline{CE}$

Para obtener *sen* $(\alpha + \beta)$



$$sen\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} \quad \text{pero} \quad \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED};$$

entonces,

$$sen\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}+\overline{ED}}{\overline{OD}} \qquad sen\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}$$

Para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos α y β

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \ldots(1) \qquad sen\,\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \ldots(3)$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \ldots(2) \qquad cos\,\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} \ldots(4)$$

Si se realiza el producto de (1) y (4); (2) y (3) se tiene:

$$(sen\,\alpha)(cos\,\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} \ldots(5)$$

$$(sen\,\beta)(cos\,\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} \ldots(6)$$

Al sumar (5) y (6):

$$(sen\,\alpha)(\,cos\,\beta) + (sen\,\beta)(\,cos\,\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene *sen* $(\alpha + \beta)$, entonces:

$$\mathbf{sen\,(\alpha+\beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\beta)(cos\,\alpha)}$$

Para obtener *cos* $(\alpha + \beta)$

$$cos\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}; \qquad \text{pero} \qquad \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB};$$

entonces,

$$cos\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OB}-\overline{AB}}{\overline{OD}} \qquad cos\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}}$$

Si se realiza el producto de (2) y (4); (1) y (3) se tiene:

$$(cos\ \alpha)(cos\ \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \quad \ldots (7)$$

$$(sen\ \alpha)(sen\ \beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} \quad \ldots (8)$$

Al restar (8) de (7):

$$(cos\ \alpha)(cos\ \beta) - (sen\ \alpha)(sen\ \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene $cos\ (\alpha + \beta)$

$$\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) = (cos\ \alpha)(cos\ \beta) - (sen\ \alpha)(sen\ \beta)}$$

Para obtener $tan\ (\alpha + \beta)$, se emplean identidades básicas:

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{sen\ (\alpha+\beta)}{cos\ (\alpha+\beta)}; \qquad tan\ (\alpha + \beta) = \frac{(sen\ \alpha)(cos\ \beta)+(sen\ \beta)(cos\ \alpha)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)-(sen\ \alpha)(sen\ \beta)}$$

Si se divide entre $(cos\ \alpha)(cos\ \beta) \neq 0$, entonces,

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{(sen\ \alpha)(cos\ \beta)+(sen\ \beta)(cos\ \alpha)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}}{\dfrac{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)-(sen\ \alpha)(sen\ \beta)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}} = \frac{\dfrac{(sen\ \alpha)(cos\ \beta)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}+\dfrac{(sen\ \beta)(cos\ \alpha)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}}{\dfrac{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}-\dfrac{(sen\ \alpha)(sen\ \beta)}{(cos\ \alpha)(cos\ \beta)}};$$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{(sen\ \alpha)}{(cos\ \alpha)}+\dfrac{(sen\ \beta)}{(cos\ \beta)}}{1-\dfrac{(sen\ \alpha)}{(cos\ \alpha)}\cdot\dfrac{(sen\ \beta)}{(cos\ \beta)}} = \frac{tan\ \alpha + tan\ \beta}{1 - tan\ \alpha \cdot tan\ \beta}$$

Finalmente se deduce que:

$$\boldsymbol{tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\ \alpha + tan\ \beta}{1 - tan\ \alpha \cdot tan\ \beta}}$$

Para obtener las identidades trigonométricas de la diferencia se emplean las identidades de los ángulos negativos en función de ángulos positivos, es decir:

$$\boldsymbol{sen\ (-x) = -sen\ (x) \qquad cos\ (-x) = cos\ (x) \qquad tan\ (-x) = -tan\ (x)}$$

Por tanto:

$$sen\ (\alpha + \beta) = (sen\ \alpha)(cos\ \beta) + (sen\ \beta)(cos\ \alpha)$$

Se cambia β por $-\beta$ y se obtiene:

$$sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha)(cos(-\beta)) + (sen\ (-\beta))(cos\ \alpha)$$

$$\boldsymbol{sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha)(cos\ \beta) - (sen\ \beta)(cos\ \alpha)}$$

De una manera semejante se realiza la diferencia para las demás funciones trigonométricas y se obtiene:

$$\boldsymbol{cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha)(cos\ \beta) + (sen\ \alpha)(sen\ \beta)}$$

$$\boldsymbol{tan\ (\alpha - \beta) = \frac{tan\ \alpha - tan\ \beta}{1 + tan\ \alpha \cdot tan\ \beta}}$$

Resumen de fórmulas

Identidades trigonométricas de la suma de ángulos:

$$sen\,(\alpha + \beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$
$$cos\,(\alpha + \beta) = (cos\,\alpha)(cos\,\beta) - (sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$
$$tan\,(\alpha + \beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$$

Identidades trigonométricas de la diferencia de ángulos:

$$sen\,(\alpha - \beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) - (sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$
$$cos\,(\alpha - \beta) = (cos\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$
$$tan\,(\alpha - \beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$$

Valor de una función trigonométrica para la suma y la diferencia de ángulos

Los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables se emplean para obtener el valor de una función cuyo ángulo se pueda descomponer en una suma o diferencia.

EJEMPLOS

1 Obtén el valor de $sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

Solución

Al aplicar la identidad para el seno de la suma de ángulos, se determina que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,\frac{\pi}{6} + cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2 Calcula el valor exacto de *tan* (90°– 60°).

Solución

Se aplica la identidad de la tangente de la diferencia de ángulos y se obtiene:

$$tan\,(90° - 60°) = \frac{tan\,90° - tan\,60°}{1 + tan\,90° tan\,60°}$$

La *tan* 90° no está definida, por consiguiente, se multiplica la identidad $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\alpha - tan\beta}{1+tan\alpha\,tan\beta}$ por la unidad expresada como $1=\frac{ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha}$

$$tan(\alpha-\beta)=\left(\frac{tan\alpha - tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\,tan\,\beta}\right)\left(\frac{ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha}\right)=\frac{tan\,\alpha\,ctg\,\alpha - tan\,\beta\,ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha + tan\,\alpha\,tan\,\beta\,ctg\,\alpha}$$

Por identidades $tan\,\alpha\,ctg\,\alpha = 1$, entonces:

$$tan(\alpha-\beta)=\frac{1-tan\beta\,ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha+1(tan\,\beta)}=\frac{1-tan\beta\,ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha+tan\,\beta}$$

Sustituyendo $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$ y posteriormente los valores de $ctg\;90° = 0$ y $tan\,60° = \sqrt{3}$, se obtiene como resultado:

$$tan(90°-60°)=\frac{1-tan\,60°\,ctg\,90°}{ctg\,90°+tan\,60°}=\frac{1-(\sqrt{3})(0)}{0+\sqrt{3}}=\frac{1-0}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 Expresa en función de x la identidad $cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

Solución

Se aplica la identidad del coseno de la diferencia de ángulos:

$$cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

Se obtiene:

$$cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = cos\frac{3}{2}\pi\ cos\ x + sen\frac{3}{2}\pi\ sen\ x = (0)\ cos\ x + (-1) sen\ x$$
$$= 0 - sen\ x$$
$$= -\ sen\ x$$

Resulta que, $cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\ sen\ x$

EJERCICIO 43

Aplica las identidades de suma o diferencias de ángulos y determina el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$
2. $cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
3. $sen(45° + 60°)$
4. $tan(45° + 90°)$
5. $sec\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
6. $cos(270° - 45°)$
7. $ctg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
8. $csc\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$
9. $tan\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)$
10. $ctg\left(2\pi - \frac{7}{4}\pi\right)$

Expresa en función del ángulo indicado las siguientes expresiones:

11. $sen\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$
12. $cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$
13. $sen(2\pi + \beta)$
14. $tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
15. $csc\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$
16. $ctg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$
17. $cos\left(x - \frac{8}{3}\pi\right)$
18. $sec(\pi + 2\omega)$
19. $tan(3\pi - \alpha)$
20. $sen\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicación de las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Para determinar el valor de una función trigonométrica de determinados ángulos, éstos se descomponen como la suma o la diferencia de dos ángulos notables.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el cos 75° y expresa 75° como una suma de ángulos notables.

Solución

El ángulo de 75°, como la suma de ángulos notables, es 75° = 30° + 45°

Entonces,

$$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°)$$

Se emplea la identidad $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$

$$cos\ (75°) = cos\ (30° + 45°) = (cos\ 30°)(cos\ 45°) - (sen\ 30°)(sen\ 45°)$$

Al sustituir el valor de cada función trigonométrica, se determina que:

$$cos\ 75° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $cos\ 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 Determina tan 15° y expresa 15° como una diferencia de ángulos notables.

Solución

El ángulo de 15° se expresa como 60° – 45°, entonces:

$$tan\ (15°) = tan\ (60° - 45°)$$

Se emplea la identidad $tan\ (\alpha - \beta) = \frac{tan\ \alpha - tan\ \beta}{1 + tan\ \alpha \cdot tan\ \beta}$ en la que se sustituyen los valores de los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$,

$$tan\ (15°) = tan\ (60° - 45°) = \frac{tan\ 60° - tan\ 45°}{1 + tan\ 60° \cdot tan\ 45°}$$

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables:

$$tan\ (15°) = tan\ (60° - 45°) = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\left(\sqrt{3}\right)(1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Al racionalizar el denominador, se obtiene:

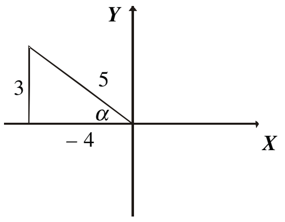
$$tan\ 15° = 2 - \sqrt{3}$$

3 Calcula las funciones trigonométricas básicas de $(\alpha + \beta)$ si sabes que $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $tan\ \beta = \frac{5}{12}$ para $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$.

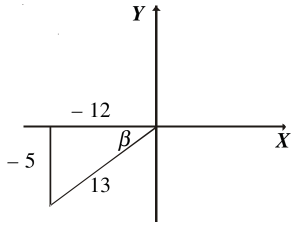
Solución

Se obtienen las funciones de los ángulos α y β, con el teorema de Pitágoras y se respetan los signos de las funciones en los cuadrantes indicados.

Para $sen\ \alpha$, el segundo cuadrante



Para $tan\ \beta$, el tercer cuadrante



Funciones del ángulo α: $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$, $cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$ y $tan\ \alpha = -\frac{3}{4}$

Funciones del ángulo β: $sen\ \beta = -\frac{5}{13}$, $cos\ \beta = -\frac{12}{13}$ y $tan\ \beta = \frac{5}{12}$

Por consiguiente, estos valores se sustituyen en las identidades de sumas de ángulos.

$$sen\ (\alpha + \beta) = (sen\ \alpha)(cos\ \beta) + (sen\ \beta)(cos\ \alpha) = \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= -\frac{36}{65}+\frac{20}{65} = -\frac{16}{65}$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = (cos\ \alpha)(cos\ \beta) - (sen\ \alpha)(sen\ \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{48}{65}+\frac{15}{65} = \frac{63}{65}$$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\ \alpha + tan\ \beta}{1 - tan\ \alpha \cdot tan\ \beta} = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{12}\right)} = \frac{-\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}} = -\frac{16}{63}$$

Por tanto, los resultados son:

$$sen\ (\alpha + \beta) = -\frac{16}{65},\ cos\ (\alpha + \beta) = \frac{63}{65}\ \text{ y }\ tan\ (\alpha + \beta) = -\frac{16}{63}$$

4 Demuestra la siguiente identidad:

$$arc\ tan\ \frac{2\sqrt{t}}{t-1} - arc\ ctg\ \sqrt{t} = arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

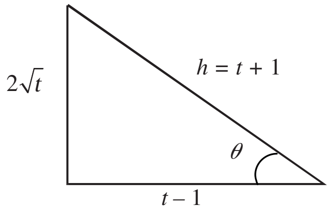
Solución

Sean $\theta = arc\ tan\ \frac{2\sqrt{t}}{t-1}$ y $\alpha = arc\ ctg\ \sqrt{t}$, entonces $\theta - \alpha = arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ que es la identidad a demostrar donde

$$tan\ \theta = \frac{2\sqrt{t}}{t-1}\ \text{ y }\ ctg\ \alpha = \sqrt{t}$$

Se construyen los triángulos respectivamente,

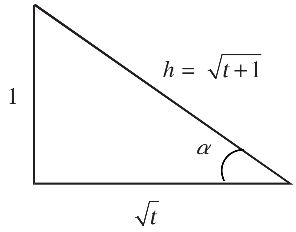
Para el ángulo θ



Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 = (2\sqrt{t})^2 + (t-1)^2$$
$$h = \sqrt{4t + t^2 - 2t + 1}$$
$$h = \sqrt{t^2 + 2t + 1}$$
$$h = \sqrt{(t+1)^2} = t + 1$$

Para el ángulo α



Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 = (\sqrt{t})^2 + (1)^2$$
$$h = \sqrt{t+1}$$

Se realiza la demostración aplicando seno a $(\theta - \alpha)$

$$sen\ (\theta - \alpha) = sen\ \theta\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \theta$$

Pero $sen\ \theta = \frac{2\sqrt{t}}{t+1}$, $cos\ \theta = \frac{t-1}{t+1}$, $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$ y $sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, entonces

$$sen\ (\theta - \alpha) = \frac{2\sqrt{t}}{t+1}\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\cdot\frac{t-1}{t+1} = \frac{2t-t+1}{(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{(t+1)}{(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Donde,

$$sen\ (\theta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \rightarrow \quad \theta - \alpha = arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Así queda demostrada la identidad.

EJERCICIO 44

Determina los valores de las siguientes funciones trigonométricas y expresa los ángulos como suma o diferencia:

1. $tan\ 105°$
2. $cot\ 75°$
3. $csc\ 15°$
4. $sec\ 105°$
5. $tan\ 255°$
6. $cos\ 285°$
7. $tan\ 345°$
8. $sec\ 165°$
9. $csc\ 255°$
10. $sen\ 165°$
11. Si $cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$ con $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $tan\ \beta = \frac{2}{3}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla $sen(\alpha + \beta)$, $cos(\alpha + \beta)$ y $tan(\alpha + \beta)$.
12. Si $tan\ \alpha = 1$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $sec\ \beta = 2$ con $\frac{3}{2}\pi \leq \beta \leq 2\pi$, halla $sen(\alpha - \beta)$, $cos(\alpha - \beta)$ y $tan(\alpha - \beta)$.
13. Si $sec\ \alpha = -\frac{3}{2}$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $ctg\ \beta = \sqrt{2}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las seis funciones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$ y $(\alpha - \beta)$.

Demuestra las siguientes identidades:

14. $\left[sen\ (\pi - x) + sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\left[sen\ x - cos\ x\right] \equiv 1 - 2\cos^2 x$
15. $\left[cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - cos\ (\pi - x)\right] - \left[sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] \equiv 2\ sen\ x$
16. $\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sen\ (\pi + x)\right] - \left[cos(\pi + x) + cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] \equiv 3\ sen\ x + cos\ x$
17. $\dfrac{sen\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right)}{sec\ \beta} + \dfrac{cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{csc\ \beta} \equiv 1$
18. $tan(\pi - \alpha) \cdot sen\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot sen(\pi - \alpha) \equiv 1 - cos^2\ \alpha$
19. $[sen\ \alpha - sen\ \beta]^2 - 2\ cos(\alpha + \beta) + [cos\ \alpha + cos\ \beta]^2 \equiv 2$
20. $\dfrac{sec(\pi - \omega)}{csc\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)} + \dfrac{sen(\pi + \omega)}{cos(\pi + \omega)} \equiv tan\ \omega - 1$
21. $csc(\pi - y) + \dfrac{cos(\pi + y)}{tan(\pi + y)} \equiv sen\ y$
22. $\dfrac{csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \dfrac{tan(\pi - x)}{sen\ x} \equiv sec\ x \cdot (csc\ x + 1)$
23. $\left[sen(x + 2\pi) + cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \dfrac{4\ cos(x - 2\pi)}{csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \equiv 4$
24. $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta + \gamma) + sen\ (\alpha - \beta - \gamma)}{cos\ (\alpha + \beta + \gamma) + cos(\alpha - \beta - \gamma)} \equiv tan\ \alpha$

25. $sen(\theta+\omega)\cdot sen(\theta-\omega) \equiv (sen\,\theta + sen\,\omega)(sen\,\theta - sen\,\omega)$

26. $tan\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) \equiv -\frac{2}{sen^2\,\delta - cos^2\,\delta}$

27. $4\,arc\,tan\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi \equiv 4\,arc\,tan\left(-\frac{1}{5}\right)$

28. $sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} \equiv -sen^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

29. $cos^{-1}\frac{12}{13} - cos^{-1}\frac{33}{65} \equiv -sen^{-1}\frac{3}{5}$

30. $sec^{-1}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} - ctg^{-1}t \equiv 0,\ t > 0$

31. $arc\,sen\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - arc\,cos\frac{t^2-1}{t^2+1} \equiv -arc\,tan\frac{1}{t},\ t > 0$

32. $sen^{-1}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \equiv sen^{-1}(1),\ t > 0$

33. $sen^{-1}\sqrt{\frac{t}{t+1}} - sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{t+1}} \equiv sen^{-1}\frac{t-1}{t+1},\ t \geq 1$

34. $arc\,tan\,s - arc\,sen\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \equiv arc\,tan\frac{s-t}{1+st},\ s > 0 \text{ y } t > 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones trigonométricas del ángulo doble

Estas funciones se obtienen a partir de las identidades de la suma de ángulos, como se muestra a continuación:

Seno del ángulo doble *sen* (2α)

Para obtener el $sen\,(2\alpha)$ se emplea la identidad $sen\,(\alpha+\beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$sen\,(\alpha+\beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$
$$sen\,(2\alpha) = (sen\,\alpha)(cos\,\alpha) + (sen\,\alpha)(cos\,\alpha)$$
$$\mathbf{sen\,(2\alpha) = 2\,(sen\,\alpha)(cos\,\alpha)}$$

Coseno del ángulo doble *cos* (2α)

Para obtener $cos\,(2\alpha)$ se emplea la identidad $cos\,(\alpha+\beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$cos\,(\alpha+\beta) = (cos\,\alpha)(cos\,\beta) - (sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$
$$cos\,(2\alpha) = (cos\,\alpha)(cos\,\alpha) - (sen\,\alpha)(sen\,\alpha)$$

$\mathbf{cos\,(2\alpha) = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}$ (con el empleo de identidades trigonométricas básicas)

$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = 1 - 2\,sen^2\,\alpha}$$
$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = 2\,cos^2\,\alpha - 1}$$

Tangente del ángulo doble *tan* (2α)

Para obtener $\tan(2\alpha)$ se emplea la identidad $\tan(\alpha+\beta)$ donde $\beta=\alpha$

Entonces:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}$$

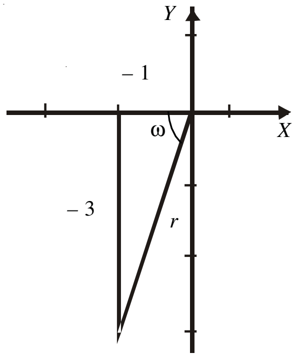
$$\mathbf{\tan(2\alpha)}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

EJEMPLOS

1 Obtén las funciones trigonométricas de (2ω), si se sabe que $\tan\omega=3$, para $\pi\le\omega\le\frac{3\pi}{2}$

Solución

En este caso el ángulo ω se encuentra en el tercer cuadrante, entonces: $\tan\omega=\frac{-3}{-1}$



Por el teorema de Pitágoras

$$r^2=(-1)^2+(-3)^2$$

$$r^2=1+9$$

$$r=\sqrt{10}$$

Se obtienen las funciones trigonométricas de ω:

$$\operatorname{sen}\omega=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10},\quad \cos\omega=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}\quad \text{y}\quad \tan\omega=\frac{-3}{-1}=3$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}2\omega=2(\operatorname{sen}\omega)(\cos\omega)=2\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{(6)(10)}{100}=\frac{3}{5}$$

$$\cos 2\omega=\cos^2\omega-\operatorname{sen}^2\omega=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{10-90}{100}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan 2\omega=\frac{2\tan\omega}{1-\tan^2\omega}=\frac{2\cdot(3)}{1-(3)^2}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$$

2 Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen}^6x+\cos^6x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

Demostración

$$(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x)(\operatorname{sen}^4x-\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x+\cos^4x)=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

$$(1)(\operatorname{sen}^4x-\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x+\cos^4x)=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

$$\operatorname{sen}^4x-\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x+\cos^4x+3\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x-3\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

$$(\operatorname{sen}^4x+2\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x+\cos^4x)-3\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

$$(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x)^2-3\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

$$1-3\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x \qquad (\text{pero } \operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cdot\cos x)$$

$$1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x\equiv 1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x}=sen\ 2x$$

Demostración

Se inicia con la sustitución de las siguientes identidades:

$$1=sen^2 x+\cos^2 x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-sen^2 x \quad \text{y} \quad ctg\ x=\frac{\cos x}{sen\ x}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se simplifica:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x}=\frac{(sen^2 x+\cos^2 x)+(\cos^2 x-sen^2 x)}{ctg\ x}=\frac{2\cos^2 x}{\frac{\cos x}{sen\ x}}=\frac{2\cos^2 x\ sen\ x}{\cos x}=2sen\ x\cos x$$

Pero $2\ sen\ x\cos x = sen\ 2x$, por consiguiente se comprueba la igualdad:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x}\equiv sen\ 2x$$

Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo

Seno de la mitad de un ángulo: $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener el $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha) = 1 - 2\ sen^2\alpha$, entonces se realiza el cambio $\alpha=\frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right)=1-2sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\quad\rightarrow\quad \cos\omega=1-2sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Se despeja $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\boldsymbol{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}}$

Coseno de la mitad de un ángulo: $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Entonces se realiza el cambio $\alpha=\frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-1\quad\rightarrow\quad \cos\omega=2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-1$$

Se despeja $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}}$

Tangente de la mitad de un ángulo: $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplean identidades trigonométricas básicas:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\omega}{2}}{\frac{1+\cos\omega}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{(1-\cos\omega)\cdot(1-\cos\omega)}{(1+\cos\omega)\cdot(1-\cos\omega)}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\omega)^2}{1-\cos^2\omega}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\omega)^2}{\operatorname{sen}^2\omega}}=\frac{1-\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}=\frac{1-\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}}$$

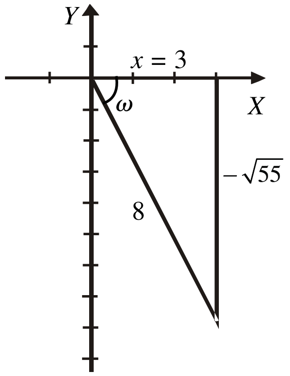
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén las funciones trigonométricas básicas de $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ si se sabe que: $\operatorname{sen}\omega=-\frac{\sqrt{55}}{8}$ para $270° \leq \omega \leq 360°$.

Solución

Se ubica el ángulo ω en el cuarto cuadrante:



Por el teorema de Pitágoras

$$(8)^2=(x)^2+(-\sqrt{55})^2$$
$$64=x^2+55$$
$$64-55=x^2$$
$$x=\sqrt{9}$$
$$x=3$$

Se obtienen las funciones trigonométricas del ángulo ω:

$$\operatorname{sen}\omega=-\frac{\sqrt{55}}{8}\qquad \cos\omega=\frac{3}{8}\qquad \tan\omega=-\frac{\sqrt{55}}{3}$$

De acuerdo con el resultado anterior, las funciones trigonométricas del ángulo $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ son:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{11}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1-\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}=\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{55}}{8}\right)}=\frac{\frac{5}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}}=-\frac{5}{\sqrt{55}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$$

2 Obtén el valor de las funciones trigonométricas básicas del ángulo de 15°, haciendo $15° = \frac{30°}{2}$

Solución

a) Para hallar el valor de *sen* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$sen\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}$$

Entonces,

$$sen\ 15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

b) Para hallar el valor de *cos* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}$$

Entonces,

$$\cos 15° = \cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

c) Para hallar el valor de *tan* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-\cos\omega}{sen\ \omega}$$

Entonces,

$$\tan 15° = \tan\left(\frac{30°}{2}\right) = \frac{1-\cos 30°}{sen\ 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$$

Por consiguiente,

$$\tan 15° = 2-\sqrt{3}$$

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} \equiv \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Demostración

Se aplican las identidades del doble del ángulo

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\cos\alpha - \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Se realiza una factorización tanto en el numerador como en el denominador,

$$\frac{1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha(1+2\cos\alpha)} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Se aplican identidades básicas con el nuevo resultado,

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Pero $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ y $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, entonces se demuestra la igualdad

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} \equiv \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

EJERCICIO 45

1. Utiliza las identidades del ángulo mitad para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$ y $\frac{7}{8}\pi$.
2. Obtén las funciones trigonométricas de (2α) y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, si se sabe que $csc\ \alpha = 4$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
3. Si se sabe que $tan\ \beta = \frac{12}{5}$, para $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, halla las funciones trigonométricas de (2β) y $\left(\frac{\beta}{2}\right)$.
4. Dada la función trigonométrica $cos\ \omega = \frac{5}{8}$ donde $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de (2ω) y $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
5. Obtén las funciones trigonométricas de (2α) y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ si se sabe que: $sec\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
6. Si $sen\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, determina $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tan\ \alpha$.
7. Si $cos\ 2\beta = \frac{15}{17}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de β y $\frac{\beta}{2}$.
8. Si $sen\ \frac{1}{4}\alpha = \sqrt{\frac{10-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}}$, determina las funciones trigonométricas de α si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
9. Si $csc\ \frac{1}{4}\beta = \sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{6}}}$ y $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las funciones trigonométricas de β y $\frac{\beta}{2}$.
10. Si $ctg\ \frac{\omega}{2} = -3$ y $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, halla las funciones trigonométricas de ω, 2ω y 4ω.

Demuestra las siguientes identidades:

11. $\frac{2}{1 + cos\ \alpha} = sec^2 \frac{\alpha}{2}$
12. $[cos\ 2x - sen\ 2x]^2 - 1 = sen(-4x)$
13. $cos\ 8x + cos\ 4x = 2cos\ 2x - 4sen^2\ 3x \cdot cos\ 2x$
14. $sen\ 4x + sen\ 6x = 2\ (sen\ 5x \cdot cos\ x)$
15. $ctg\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \frac{1 + sen\ 2\omega}{cos\ 2\omega}$
16. $cos^8\beta - sen^8\beta = \frac{1}{4} cos\ 2\beta \cdot (3 + cos\ 4\beta)$
17. $\sqrt{2}\ sec\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\ (sen\ \alpha + cos\ \alpha)}{1 + sen\ 2\alpha}$
18. $cos\ 12°\ cos\ 24°\ cos\ 48°\ cos\ 96° = -\frac{1}{16}$
19. $\frac{cos^3 x - sen^3 x}{cos\ 2x} = cos\ x - \frac{sen\ 2x}{2\ (sen\ x + cos\ x)} + sen\ x$

20. $\dfrac{1}{1 + sen\ \varphi} = \dfrac{1 + tan^2 \dfrac{\varphi}{2}}{\left(tan^2 \dfrac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(1 + ctg\ \dfrac{\varphi}{2}\right)^2}$

21. $2\left[cos\dfrac{y}{2} - sen\dfrac{y}{2}\right] \cdot \left[sen\dfrac{y}{2} + cos\dfrac{y}{2}\right] cos\ x = cos(x+y) + cos(x-y)$

22. $sen(x+2y) - sen\ x = 2sen\ y \cdot cos(x+y)$

23. $4\ csc^2\beta \cdot cos\ \beta = ctg^2\dfrac{\beta}{2} - tan^2\dfrac{\beta}{2}$

24. $\left[3\ cos\ \dfrac{\theta}{2} - sen\ \dfrac{\theta}{2}\right] \cdot \left[cos\ \dfrac{\theta}{2} + sen\ \dfrac{\theta}{2}\right] = 2\ cos\ \theta + sen\ \theta + 1$

25. $sen^6\ x + cos^6\ x = 1 - \dfrac{3}{4}\ sen^2\ 2x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identidades trigonométricas para transformar un producto en suma o resta

De las identidades:

$$sen\ (x + y) = (sen\ x)\ (cos\ y) + (sen\ y)\ (cos\ x) \quad \text{se realiza la suma con}$$
$$+ \quad sen\ (x - y) = (sen\ x)\ (cos\ y) - (sen\ y)\ (cos\ x)$$
$$sen\ (x + y) + sen\ (x - y) = 2\ (sen\ x)(cos\ y)$$

Al despejar,

$$(\boldsymbol{sen\ x})\ (\boldsymbol{cos\ y}) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right]$$

De forma semejante se obtiene:

$$(\boldsymbol{cos\ x})\ (\boldsymbol{sen\ y}) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) - sen(x-y)\right]$$

De las identidades:

$$cos\ (x + y) = (cos\ x)\ (cos\ y) - (sen\ x)\ (sen\ y) \quad \text{se realiza la suma con}$$
$$+ \quad cos\ (x - y) = (cos\ x)\ (cos\ y) + (sen\ x)\ (sen\ y)$$
$$cos\ (x + y) + cos\ (x - y) = 2\ (cos\ x)(cos\ y)$$

Al despejar,

$$(\boldsymbol{cos\ x})\ (\boldsymbol{cos\ y}) = \frac{1}{2}\left[cos(x+y) + cos(x-y)\right]$$

De la misma manera se obtiene:

$$(\boldsymbol{sen\ x})\ (\boldsymbol{sen\ y}) = -\frac{1}{2}\left[cos(x+y) - cos(x-y)\right]$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa el siguiente producto en forma de suma o resta:

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x)$$

Solución

Se emplea la identidad $(cos\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[cos(x+y)+cos(x-y)\right]$ y se obtiene:

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x) = \frac{1}{2}\left[cos(8x+2x)+cos(8x-2x)\right]$$

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x) = \frac{1}{2}\left[cos(10x)+cos(6x)\right]$$

2 Encuentra el valor del siguiente producto:

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Solución

Se emplea la identidad $(sen\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{9\pi+\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{9\pi-\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Al sustituir el valor de las funciones trigonométricas de ángulos notables:

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

EJERCICIO 46

Convierte los siguientes productos en sumas o diferencias de funciones trigonométricas:

1. $sen(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta)$
2. $cos(45°)\,sen(60°)$
3. $sen(y+\beta)\,sen(y-\beta)$
4. $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
5. $sen(82°\,30')\,cos(37°\,30')$
6. $sen(37°\,30')\,sen(7°\,30')$
7. $cos(x+\alpha)\,sen(x-\alpha)$
8. $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
9. $sen(187°\,30')\,cos(217°\,30')$
10. $cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
11. $4\,sen(3\alpha)\,sen(\alpha)$
12. $5cos(2\alpha)\,sen(6\alpha)$
13. $cos(47°)\,sen(43°)$
14. $cos\left(\frac{2}{3}\alpha\right)cos\left(\frac{5}{3}\beta\right)$
15. $3sen(9\alpha)\,cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$
16. $sec\left(\frac{\pi}{3}\right)sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$
17. $tan\,2\alpha\;ctg\,\alpha$
18. $sec\left(\frac{3}{4}\pi\right)csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$
19. $tan(x+a)\,tan(x-a)$
20. $\frac{sen(2\alpha+\beta)}{sec(2\alpha-\beta)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostración de identidades

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente igualdad: $sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$

Demostración

Se aplica la identidad $(sen\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$

$$sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[sen\frac{\pi}{6}+sen 0\right]$$

Pero $sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $sen 0 = 0$, entonces:

$$sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+0\right] = \frac{1}{4}$$

Por tanto queda demostrada la igualdad.

2 Demuestra la siguiente expresión:

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = sen(x+y)$$

Demostración

Se aplica la transformación de productos a sumas y se obtiene:

$$sen\,x\,cos\,y = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$$

$$sen\,y\,cos\,x = cos\,x\,sen\,y = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)-sen(x-y)\right]$$

Al sumar ambas expresiones:

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[sen(x+y)-sen(x-y)\right]$$

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = \frac{1}{2}sen(x+y)+\frac{1}{2}sen(x-y)+\frac{1}{2}sen(x+y)-\frac{1}{2}sen(x-y)$$

Se simplifican términos semejantes, entonces:

$$sen\,x\,cos\,y + sen\,y\,cos\,x = sen(x+y)$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

EJERCICIO 47

Demuestra las siguientes igualdades:

1. $\dfrac{1}{sec\ 30°\ \ csc\ 120°} = \dfrac{3}{4}$

2. $\dfrac{sen\ 75°\ \ cos\ 45°}{sen\ 225°\ \ cos\ 75°} = -2-\sqrt{3}$

3. $\dfrac{cos\ 35°\ sen\ 10° + cos\ 10°\ sen\ 35°}{cos\ 20°\ cos\ 10° - sen\ 20°\ sen\ 10°} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. $\dfrac{tan\dfrac{\pi}{6}\,tan\dfrac{5\pi}{12} + tan\dfrac{\pi}{12}\,tan\dfrac{5\pi}{12}}{1 - tan\dfrac{\pi}{6}\,tan\dfrac{\pi}{12}} = 2+\sqrt{3}$

5. $sen\ x\ cos\ x + cos\ 3x\ sen\ x = \dfrac{1}{2}\,sen\ 4x$

6. $cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)sen\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left[sen\ 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. $\dfrac{sen^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{cos(2\pi - x)cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)sen^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = sec\ x$

8. $cos\ x[cos\ 2x - 2sen^2\ x] = cos\ 3x$

9. $tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\ tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{2cos\ 2x+1}{2cos\ 2x-1}$

10. $sen(10° + x)\ cos\ (20° - x) + cos(80° - x)sen(70° + x) = sen(2x - 10°)$

11. $sen\left(\dfrac{2}{9}\pi + x\right)cos\left(\dfrac{1}{18}\pi + x\right) - sen\left(\dfrac{5}{18}\pi - x\right)cos\left(\dfrac{4}{9}\pi - x\right) = \dfrac{1}{2}$

12. $\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{csc\ 2x} - \dfrac{sen\,x}{csc\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)} = sen\ 3x$

13. $cos\ 2x + 2[sen\ x\ cos\ y + cos\ x\ sen\ y]\ sen(x-y) = cos\ 2y$

14. $sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot sen\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)\cdot cos(\pi - x) = cos^3\ x$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Identidades para transformar sumas o restas de funciones trigonométricas en un producto

Dados los ángulos x y y, tales que

$$x + y = \alpha \qquad ; \qquad x - y = \beta$$

Al resolver el sistema de ecuaciones para x y y se obtienen los siguientes resultados:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ; \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Estos valores angulares se sustituyen en la identidad:

$$(sen\ x)\ (cos\ y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right]$$

Y el resultado es:

$$sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\ \alpha + sen\ \beta\right]$$

Ahora, al despejar la suma de los senos, se determina que:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha + sen\ \beta = 2\, sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

De la misma manera se obtiene:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha - sen\ \beta = 2\, cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha + cos\ \beta = 2\, cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha - cos\ \beta = -2\, sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa lo siguiente: $sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6}$

Solución

Al aplicar la transformación de diferencia de senos a productos, se obtiene:

$$sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6} = 2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$; simplificando

$$sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6} = 2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Calcula, sin hacer uso de las tablas trigonométricas:

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Solución

Se emplea la identidad, $sen\ \alpha + sen\ \beta = 2\ sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\left[sen\left(\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\right)cos\left(\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}\right)\right]$$

Se simplifica,

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Dado que $\frac{\pi}{12}$ no es un ángulo notable, se puede emplear la identidad:

$$cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}$$

Donde $\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}$, entonces,

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\left[(\ 1\ )\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3 Simplifica la siguiente expresión: $cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se emplea la identidad, $cos\ \alpha - cos\ \beta = -2\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\ sen\left(\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\ sen(\omega)\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\ sen(\omega)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\cdot sen\ \omega$$

4 Simplifica la siguiente expresión: $sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$

Solución

Al utilizar la identidad, $sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, se obtiene:

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2\,cos\left(\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)sen\left(\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\,\frac{x}{2}\;\;sen\,\frac{\pi}{2}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\,\frac{x}{2}\;\;(1)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\,\frac{x}{2}$$

EJERCICIO **48**

Convierte en producto las siguientes sumas y restas de funciones trigonométricas:

1. $sen\,165° + sen\,75°$
2. $cos(7\beta)+cos(-2\beta)$
3. $sen(240°) + sen(120°)$
4. $cos(5\theta) - cos(3\theta)$
5. $cos(37°\;29')+cos(52°\;31')$
6. $sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)-sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$
7. $cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)+cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$
8. $sen\,35° - sen\,25°$
9. $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
10. $cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$
11. $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$
12. $sen\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+sen\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$
13. $cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$
14. $sen\left(\beta+\frac{\pi}{8}\right)+sen\left(\beta-\frac{\pi}{8}\right)$
15. $sen\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)+sen\left(\frac{7}{8}\pi-\alpha\right)$
16. $cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostración de identidades

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente igualdad: $\dfrac{sen\ 50° + sen\ 10°}{cos\ 50° + cos\ 10°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Solución

Se aplica la suma de senos y cosenos

$$\frac{sen\ 50° + sen\ 10°}{cos\ 50° + cos\ 10°} = \frac{2\left[sen\frac{1}{2}(50°+10°)cos\frac{1}{2}(50°-10°)\right]}{2\left[cos\frac{1}{2}(50°+10°)cos\frac{1}{2}(50°-10°)\right]} = \frac{sen\ 30°\ cos\ 20°}{cos\ 30°\ cos\ 20°} = tan\ 30°$$

Pero $tan\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que la igualdad queda demostrada.

2 Demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\ x + sen\ 3x + sen\ 5x + sen\ 7x = 4\ sen\ 4x\ cos\ 2x\ cos\ x$$

Solución

Se agrupan dos a dos los sumandos

$$sen\ x + sen\ 3x + sen\ 5x + sen\ 7x = (sen\ x + sen\ 3x) + (sen\ 5x + sen\ 7x)$$

Se aplica la transformación de suma de senos a productos

$$sen\ x + sen\ 3x = 2\left[sen\frac{1}{2}(x+3x)cos\frac{1}{2}(x-3x)\right] = 2\left[sen\ 2x\ cos(-x)\right] = 2\ sen\ 2x\ cos\ x$$

$$sen\ 5x + sen\ 7x = 2\left[sen\frac{1}{2}(5x+7x)cos\frac{1}{2}(5x-7x)\right] = 2\left[sen\ 6x\ cos(-x)\right] = 2\ sen\ 6x\ cos\ x$$

Entonces,

$$sen\ x + sen\ 3x + sen\ 5x + sen\ 7x = 2sen\ 2x\ cos\ x + 2sen\ 6x\ cos\ x = 2cos\ x\ (sen\ 2x + sen\ 6x)$$

En esta nueva expresión se aplica la transformación de sumas a productos,

$$2\ cos\ x\ (sen\ 2x + sen\ 6x) = 2\ cos\ x \cdot 2\left[sen\frac{1}{2}(2x+6x)cos\frac{1}{2}(2x-6x)\right]$$

$$= 4\ cos\ x\ [sen\ 4x\ cos(-2x)]$$

$$= 4\ cos\ x\ sen\ 4x\ cos\ 2x$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

EJERCICIO 49

Demuestra las siguientes igualdades:

1. $cos\frac{5}{12}\pi + cos\frac{11}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{sen\ 40° + sen\ 20°}{sen\ 40° - sen\ 20°} = \frac{\sqrt{3}}{3} ctg\ 10°$

3. $\frac{sen\frac{\pi}{6} + sen\frac{5\pi}{18}}{sen\frac{5\pi}{18} - sen\frac{\pi}{6}} = \frac{tan\frac{2\pi}{9}}{tan\frac{\pi}{18}}$

4. $cos\ (x - \pi) + cos\ (x + \pi) = -2\ cos\ x$

5. $sen\ 2x + sen\ 4x - sen\ 6x = 4sen\ x\ sen\ 2x\ sen\ 3x$

6. $sen\ x - sen\ 2x + sen\ 3x - sen\ 4x = -4sen\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{5x}{2}\ cos\ x$

7. $cos\ x + cos\ 2x + cos\ 3x + cos\ 4x = 4cos\ \frac{5x}{2}\ cos\ x\ cos\ \frac{x}{2}$

8. $tan\ x = \frac{sen\ 5x - sen\ 3x}{cos\ 5x + cos\ 3x}$

9. $\frac{1 - 2sen^2\ x}{sen\ 3x - sen\ x} = \frac{1}{2} csc\ x$

10. $\frac{cos(x+y) - cos(x-y)}{sen(x+y) - sen(x-y)} = -\ tan\ x$

11. $\frac{1}{sen\,x + sen\,2x + sen\,3x} = \frac{1}{4} csc\frac{3x}{2} \sec x\, sec\frac{x}{2}$

12. $\frac{1}{4}\left[cos(a+b+c) + cos(a+b-c) + cos(a-b+c) + cos(a-b-c)\right] = cos\ a\ cos\ b\ cos\ c$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una expresión que tiene como incógnita valores angulares bajo los signos de funciones trigonométricas.

Al resolver una ecuación trigonométrica se debe encontrar el o los valores que satisfacen dicha ecuación, esto es, que en una ecuación trigonométrica no siempre existe una solución única, en ocasiones existen varias, las cuales se expresan como conjunto solución.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación para $0 \le x \le 2\pi$.

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Solución

Se despeja la incógnita x y la función seno se representa como *arc sen* en el segundo miembro, luego el intervalo indica que se tomarán como solución aquellas entre 0° y 360°

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \left(x+\frac{\pi}{4}\right) = arc\ sen\ (1)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 45°$$

El resultado puede expresarse en grados o en radianes.

2 Resuelve la siguiente ecuación para θ si $0° \le \theta \le 360°$.

$$3\ tan\ \theta - 4 = tan\ \theta - 2$$

Solución

Se agrupan los términos que tienen a las incógnitas y se reducen:

$$3\ tan\ \theta - 4 = tan\ \theta - 2 \quad \rightarrow \quad 3\ tan\ \theta - tan\ \theta = -2 + 4$$

$$2\ tan\ \theta = 2$$

$$tan\ \theta = 1$$

De esta expresión se despeja el ángulo θ

$$tan\ \theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = arc\ tan\ (1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Luego, la tangente es positiva en el primero y tercer cuadrantes, por consiguiente, el conjunto solución es $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

3 Resuelve la siguiente ecuación para x si $0 \le x \le 2\pi$.

$$2\ sen^2 x - 1 = -\ sen\ x$$

Solución

Se agrupan los términos en el primer miembro:

$$2\ sen^2 x - 1 = -sen\ x \quad \rightarrow \quad 2sen^2 x + sen\ x - 1 = 0$$

La expresión resultante se factoriza,

$$(2sen\ x - 1)(sen\ x + 1) = 0$$

Por tanto, $2sen\ x - 1 = 0$ y $sen\ x + 1 = 0$, de las cuales se despeja la incógnita x, entonces,

$$2sen\ x - 1 = 0 \qquad\qquad sen\ x + 1 = 0$$

$$sen\ x = \frac{1}{2} \qquad\qquad sen\ x = -1$$

$$x = arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad x = arc\ sen\ (-1)$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad\qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

Luego, el conjunto solución es $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

4 Resuelve la siguiente ecuación para θ, si $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$4\,cos^2\theta - 3 = 0$$

Solución

Se despeja $cos\,\theta$ de la ecuación:

$$4\,cos^2\theta - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 4\,cos^2\theta = 3 \quad \rightarrow \quad cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$cos\,\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se obtienen dos ecuaciones

$$cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y \qquad cos\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se despeja el ángulo θ

$$\theta = arc\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°, 330° \quad ; \quad \theta = arc\,cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°, 210°$$

Al final, el conjunto solución es 30°, 150°, 210° y 330°.

5 Resuelve la siguiente ecuación para θ si $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$2\,sen^2\,\theta = -\,sen\,\theta$$

Solución

Se resuelve la ecuación:

$$2sen^2\,\theta + sen\,\theta = 0 \quad \rightarrow \quad sen\,\theta\,(2\,sen\,\theta + 1) = 0$$

Se obtienen dos ecuaciones:

$$sen\,\theta = 0 \qquad 2\,sen\,\theta + 1 = 0$$

Se despeja el ángulo θ,

$$sen\,\theta = 0 \qquad 2\,sen\,\theta + 1 = 0$$

$$\theta = \text{arc}\,sen\,(0) \qquad \theta = arc\,sen\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 0°, 180°, 360° \qquad \theta = 210°, 330°$$

Por tanto, el conjunto solución es 0°, 180°, 210°, 330° y 360°.

6 Resuelve la siguiente ecuación para x si $0° \leq x \leq 360°$.

$$2\,cos^2\,x = sen\,x - 1$$

Solución

$$2\,cos^2\,x = sen\,x - 1 \quad \rightarrow \quad 2(1 - sen^2\,x) = sen\,x - 1$$

$$2 - 2sen^2\,x = sen\,x - 1$$

$$2 - 2sen^2\,x - sen\,x + 1 = 0$$

$$-\,2sen^2\,x - sen\,x + 3 = 0 \qquad (\div -1)$$

$$2sen^2\,x + sen\,x - 3 = 0$$

$$(2sen\,x + 3)(sen\,x - 1) = 0$$

Se despeja el ángulo x de ambas ecuaciones:

$$sen\,x - 1 = 0 \qquad 2\,sen\,x + 3 = 0$$

$$x = arc\,sen\,(1) \qquad sen\,x = -\frac{3}{2}\ \text{(no existe solución)}$$

$$x = 90°$$

Cabe mencionar que $2\,sen\,x + 3 = 0$ no tiene solución porque $-1 \leq sen\,x \leq 1$, entonces el conjunto solución es 90°.

EJERCICIO 50

Resuelve las siguientes ecuaciones, tales que $0° \leq x \leq 360°$.

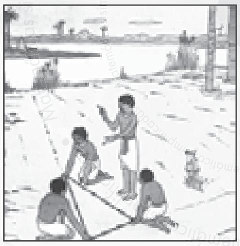
1. $sen\ x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. $cos\ x + 2\ sen\ x = 2$
3. $2\ cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$
4. $csc\ x = sec\ x$
5. $2\ cos\ x \cdot tan\ x - 1 = 0$
6. $4\ cos^2 x = 3 - 4\ cos\ x$
7. $3\ cos^2 x + sen^2 x = 3$
8. $2\ sen^2 x + sen\ x = 0$
9. $cos\ x + 9\ sen^2 x = 1$
10. $csc^2 x = 2\ cot^2 x$
11. $sen\ x \cdot tan\ x + 1 = sen\ x + tan\ x$
12. $2cos^2 x + 3sen\ x = 0$
13. $sen\ x - cos\ x = 0$
14. $3cos^2 x - sen^2 x = 0$
15. $cos\ x - \sqrt{3}\ sen\ x = 0$
16. $2sen\ x + csc\ x = 3$
17. $sen\ x \cdot ctg\ x - sen\ x = 0$
18. $2cos^3 x + cos^2 x - 2cos\ x - 1 = 0$
19. $4cos\ x - 2 = 2\ tan\ x \cdot ctg\ x - sec\ x$
20. $tan^5 x - 9\ tan\ x = 0$
21. $\frac{1}{ctg^2\ x} + \sqrt{3}\,tan\,x = 0$
22. $sen\ x \cdot sec\ x + \sqrt{2}\ sen\ x - \sqrt{2} = sec\ x$
23. $\left(2 - \sqrt{3}\right) sen\ x + \left(2 - \sqrt{3}\right) = 2cos^2\ x$
24. $\left(2 + \sqrt{5}\right) - \left(1 + 2\sqrt{5}\right) cos\ x = 2\ sen^2\ x$
25. $sec\ x(2sen\ x + 1) - 2(2sen\ x + 1) = 0$
26. $\frac{\sqrt{3}\,tan\,x}{sec\,x} - cos\,x = 0$
27. $\sqrt{2}\,cos\ x - \sqrt{2}\,sen\ x = -\sqrt{3}$
28. $5sen^2 x + cos^2 x = 2$
29. $\frac{5}{csc\ x} - 5\sqrt{3}\,cos\ x = 0$
30. $cos^2 x + cos\ x = sen^2 x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 15

Triángulos rectángulos

El triángulo RECTÁNGULO



Medición de tierras en el antiguo Egipto mediante los anudadores

Su origen se encuentra en la cultura egipcia, específicamente en la geometría egipcia.

Los egipcios dominaban a la perfección los triángulos, ya que fueron la base para la construcción de sus pirámides así como la medición de tierras. Se auxiliaban de los anudadores, hacían nudos igualmente espaciados para medir y se dieron cuenta que al ubicar cuerdas de diversas longitudes en forma de triángulo obtenían ángulos rectos y, por tanto, triángulos rectángulos, lo cual significa que tenían conocimiento de la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Sin embargo, Pitágoras fue el primero en demostrar el teorema que lleva su nombre, el cual establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, aunque los egipcios y babilónicos lo utilizaban en sus cálculos y construcciones pero sin haberlo demostrado.

Solución de triángulos rectángulos

Dados tres datos de un triángulo, si uno de ellos es un lado, encontrar el valor de los datos restantes.

Para los triángulos rectángulos basta conocer el valor de uno de los lados y algún otro dato, el cual puede ser un ángulo u otro lado, debido a que el tercer dato siempre está dado ya que, al ser triángulo rectángulo, uno de los ángulos siempre será de 90°.

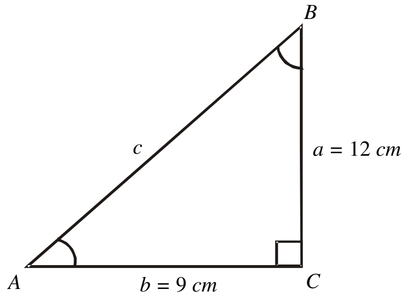
Cabe destacar que el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas son de suma importancia para la resolución de triángulos rectángulos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo *ABC*, $a = 12\ cm$, $b = 9\ cm$. Resuelve el triángulo.

Solución



Se proporcionan catetos; entonces, para encontrar la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Por lo tanto $c = 15\ cm$.

Para encontrar los ángulos se utilizan funciones trigonométricas; en este caso, al tener los tres lados se puede aplicar cualquier función. Por ejemplo, en el caso del ángulo *A* se aplica la función tangente, entonces:

$$\tan A = \frac{12}{9}$$

Se despeja el ángulo *A*:

$$\angle A = \arctan\left(\frac{12}{9}\right) = 53°\ 7'\ 48''$$

Para encontrar el tercer ángulo, se tiene que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, en particular $\angle A + \angle B = 90°$ ya que $\angle C = 90°$, por tanto:

$$53°\ 7'\ 48'' + \angle B = 90°$$

$$\angle B = 90° - 53°\ 7'\ 48''$$

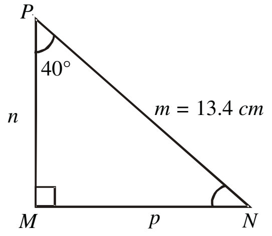
$$\angle B = 36°\ 52'\ 12''$$

2 En el triángulo MNP, $m = 13.4$ cm, $\angle P = 40°$. Resuelve el triángulo.

Solución

Para hallar el $\angle N$, se aplica:

$$\angle N + \angle P + \angle M = 180°$$



Ya que $\angle M = 90°$, entonces,

$\angle N + \angle P = 90°$ donde $\angle N = 90° - \angle P$

$$\angle N = 90° - 40°$$

$$\angle N = 50°$$

Lado n

Se elige uno de los ángulos agudos, en este caso $\angle P$ y se establece la función trigonométrica de acuerdo al lado que se va a encontrar (n) y el lado conocido ($m = 13.4$), por lo que la función que se busca es el coseno de P, entonces:

$$\cos P = \frac{n}{m} \quad \text{donde} \quad \cos 40° = \frac{n}{13.4}$$

Al despejar n:

$$n = (13.4)(\cos 40°) = (13.4)(0.76604) = 10.265\ cm$$

Para hallar el lado restante (p) se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$p = \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{(13.4)^2 - (10.26)^2} = \sqrt{179.56 - 105.27} = \sqrt{74.29} = 8.62\ cm$$

3 En el triángulo ABC, $a = 54$ cm, $A = 36°\ 20'$. Resuelve el triángulo.

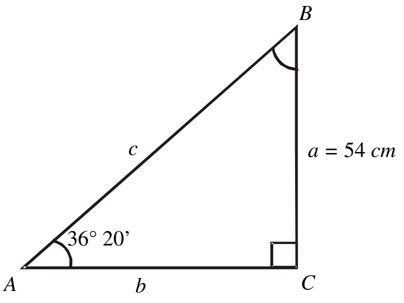
Solución

En el triángulo ABC:

$\angle B = 90° - \angle A$

$\angle B = 90° - 36°\ 20'$

$\angle B = 53°\ 40'$



Para hallar el lado b, se utiliza la función tangente de $\angle A$:

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \text{donde} \quad \tan 36°\ 20' = \frac{54}{b}$$

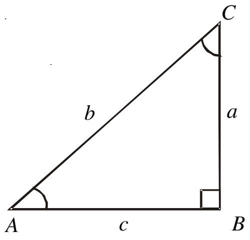
Al despejar b: $b = \dfrac{54}{\tan 36°\ 20'} = \dfrac{54}{0.7354} = 73.42\ cm$

El valor de la hipotenusa se encuentra mediante el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(54)^2 + (73.42)^2} = 91.14\ cm$$

EJERCICIO 51

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo según los datos proporcionados:



1. $a = 12$, $b = 17$
2. $\angle A = 32°$, $b = 4$
3. $\angle C = 46° \ 20'$, $a = 5$
4. $a = 32.5$, $c = 41.3$
5. $\angle A = 45°$, $a = 13$
6. $\angle C = 54°$, $b = 22.6$
7. $b = 22.5$, $c = 18.7$
8. $\angle A = 48° \ 12'$, $b = 34.5$
9. $\angle C = 34° \ 32'$, $c = 56.9$
10. $a = 18.23$, $b = 19.86$
11. $\angle A = 32° \ 27'$, $a = 12$
12. $b = \sqrt{17}$, $a = 2$
13. $\angle C = 48° \ 23'$, $b = 23$
14. $a = 7.5$, $c = 2.5$
15. $c = 13$, $\angle A = 25° \ 49'$
16. Calcula el valor de los ángulos agudos si $a = \frac{c}{2}$.
17. Determina el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x$, $b = x + 8$ y $c = x + 7$.
18. Calcula el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x + 1$, $b = x + 2$ y $c = x$.
19. Determina el valor de los ángulos agudos si $a = c$.
20. Calcula el valor de los ángulos agudos si $b = 3a$.

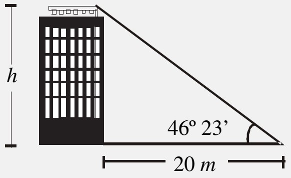
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Se sitúa un punto a 20 metros de un edificio. Si el ángulo de elevación al punto más alto del edificio es de 46° 23’, encuentra la altura del edificio.

Solución

Se representa el problema con un dibujo:



Para hallar la altura del edificio se utiliza la función tangente, ya que se tienen como datos un ángulo y el cateto adyacente a éste, y la altura representa el cateto opuesto al ángulo dado:

$$\tan 46° \, 23' = \frac{h}{20}$$

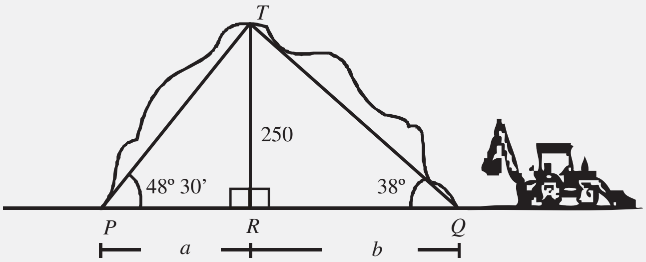
Al despejar h:

$$h = (20)\,(\tan 46° \, 23') = (20)\,(1.04949) \approx 21 \; m$$

De acuerdo con el dato anterior, la altura del edificio es de 21 *m*.

2 En la construcción de una carretera se encuentra una montaña de 250 metros de altura, a través de ella se construirá un túnel. La punta de la montaña se observa bajo un ángulo de 48° 30’ desde un punto P en un extremo de la montaña, y bajo un ángulo de 38° desde el otro extremo. ¿Cuál será la longitud del túnel?

Solución



La longitud del túnel está determinada por $a + b$.

Para obtener a, se utiliza el triángulo PRT y se aplica la función tangente de $\angle P$:

$$\tan 48° \, 30' = \frac{250}{a}$$

Al despejar a

$$a = \frac{250}{\tan 48°30'} = \frac{250}{1.1302} = 221.19 \; m$$

Para obtener b, se utiliza el triángulo QRT y se aplica la función tangente de $\angle Q$:

$$\tan 38° = \frac{250}{b}$$

Al despejar b

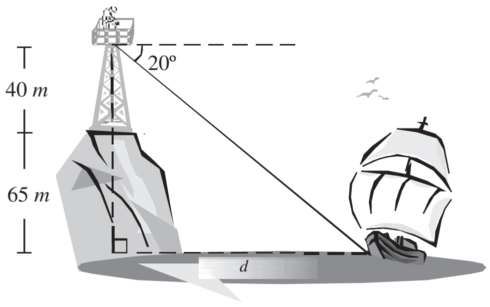
$$b = \frac{250}{\tan 380°} = \frac{250}{0.7812} = 320.02 \; m$$

Por tanto, la longitud del túnel es: 221.19 + 320.02 = 541.21 *m*.

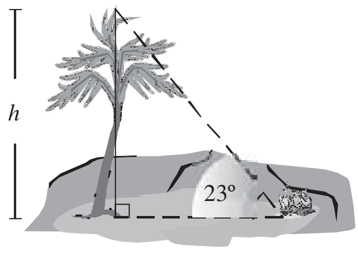
EJERCICIO 52

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una torre de 40 m que está sobre un peñasco de 65 m de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de 20° de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?



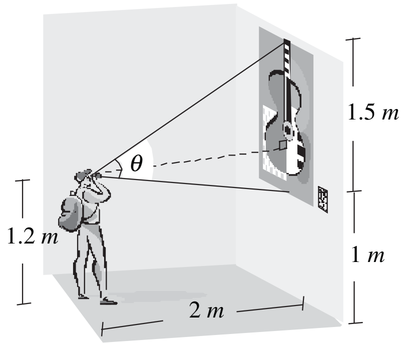
2. A una distancia de 10 m de la base de un árbol, la punta de éste se observa bajo un ángulo de 23°. Calcula la altura del árbol.

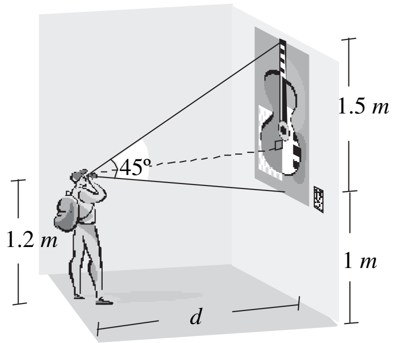


3. Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.50 metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura.

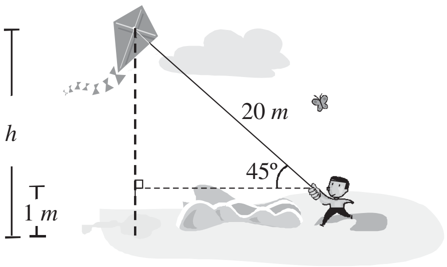
   a) ¿Cuál es el ángulo de visión?

   b) ¿A qué distancia se debe parar la persona para que el ángulo de visión sea de 45°?

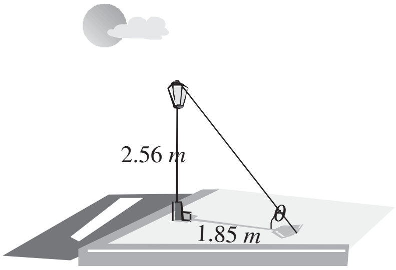




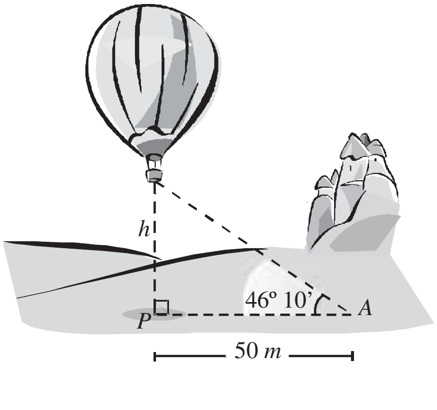
4. Un niño tiene un papalote, el cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Obtén la altura del papalote con respecto al suelo si el niño suelta 20 metros de cuerda.



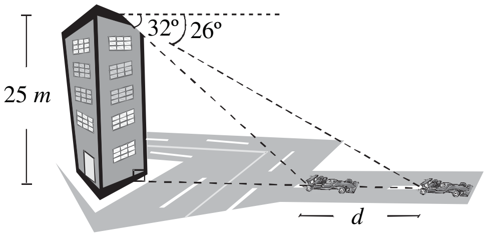
5. Determina el ángulo de elevación del Sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.



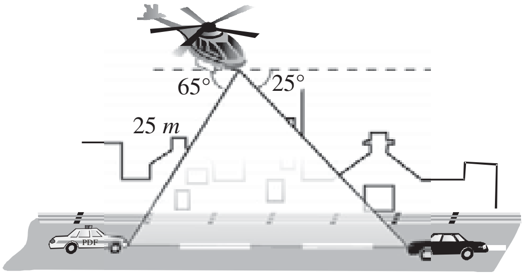
6. Un globo de aire caliente sube con un ángulo de elevación con respecto a un punto A de 46° 10'. Calcula la altura a la que se encuentra el globo, con respecto a un punto P del suelo, si la distancia de éste al punto A es de 50 metros.



7. Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 m, se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de 32°; si un instante después el ángulo es de 26°, ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?



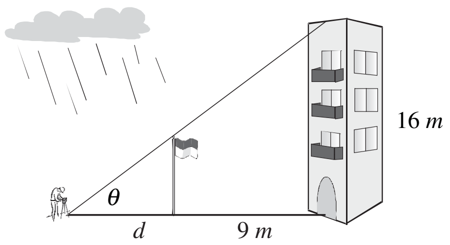
8. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, como se muestra en la figura. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de 25° y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de 65°, y su distancia a éste es de 25 metros,



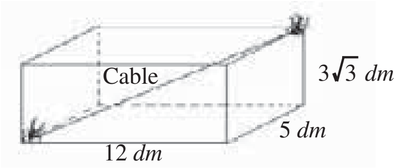
calcula:

La distancia entre el helicóptero y el delincuente.
La distancia entre el patrullero y el delincuente.
La altura del helicóptero.

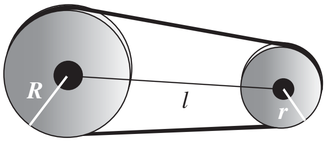
9. Un ingeniero civil desea conocer el ángulo de elevación del topógrafo, así como la distancia a la que se encuentra del asta bandera, si se sabe que el asta bandera mide la cuarta parte de la altura del edificio que es de 16 metros, y la distancia entre ambas es de 9 metros.



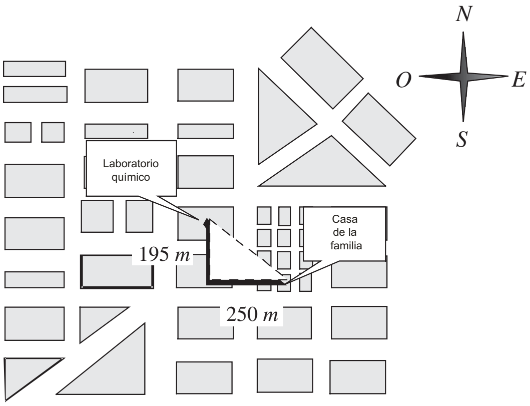
10. Una araña que se encuentra en la base de una caja desea alcanzar una mosca ubicada en la esquina opuesta de la caja, como se muestra en la figura. Las esquinas están conectadas por un cable tenso, determina cuál es el ángulo de elevación del cable y la distancia que recorrería la araña hasta llegar a la mosca por el cable.



11. Se tienen dos poleas de radios R, r y la distancia entre sus ejes es l, ¿cuál es la longitud de la cadena de transmisión?



12. Debido a un accidente en unos laboratorios químicos, se tuvieron que desalojar las casas que estuvieran en un radio de 500 m de los laboratorios. Una familia vivía a 250 m al este y 195 m al sur de los laboratorios. Determina si la familia desalojó su casa.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 16

Triángulos oblicuángulos

Johann MÜLLER

Johann Müller Von Königsberg (*regiomontanus*) 1436 - 1476

Astrónomo y matemático alemán que realizó tratados sobre la trigonometría y la astronomía, inventor de diversas herramientas para la observación y la medida del tiempo.

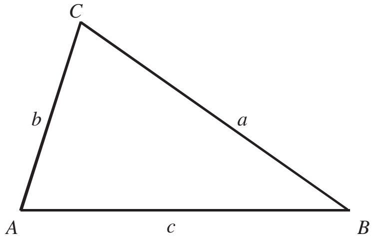
Su obra se compone de cinco libros llamados: *De triangulis omnimodis*, ¡publicada en Nuremberg 70 años después de haber sido escrita! Es interesante desde el punto de vista matemático, ya que en el primer libro se establecen las definiciones básicas de radio, arcos, igualdad, círculos, cuerdas y la función seno. En el segundo, la ley de senos para la resolución de problemas con triángulos, y del tercero al quinto libros se expone la trigonometría esférica.

Solución de triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir, no tiene un ángulo recto. Este tipo de triángulos se resuelven mediante la ley de senos, de cosenos o de tangentes.

Ley de senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.



Ley de senos:

$$\frac{a}{sen\ A}=\frac{b}{sen\ B}=\frac{c}{sen\ C}$$

La ley de senos se utiliza cuando:

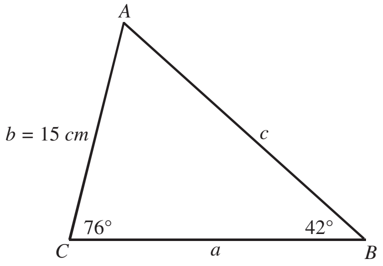
- Los datos conocidos son 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Los datos conocidos son 2 ángulos y cualquier lado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $b = 15\ cm$, $\angle B = 42°$ y $\angle C = 76°$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

Solución



Para obtener $\angle A$, se aplica $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, despejando,

$$\angle A = 180° - \angle C - \angle B = 180° - 42° - 76° = 62°$$

Se conoce el valor del lado b y el ángulo B, opuesto a dicho lado, también se proporciona el ángulo C, por tanto, se puede determinar la medida del lado c,

$$\frac{c}{sen\ C}=\frac{b}{sen\ B}$$

Al sustituir $\angle C = 76°$, $\angle B = 42°$ y $b = 15\ cm$, se determina que,

$$\frac{c}{sen\ 76°}=\frac{15}{sen\ 42°}$$

De la expresión anterior se despeja c,

$$c=\frac{(15)(sen\ 76°)}{sen\ 42°}=\frac{(15)(0.9703)}{0.6691}=21.75\ cm$$

Por último, se determina el valor del lado a con la siguiente relación:

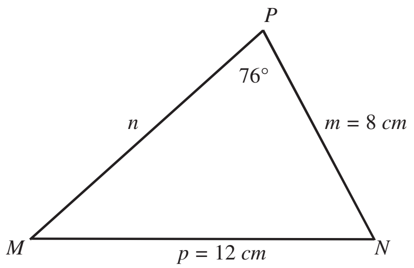
$$\frac{a}{sen\ A}=\frac{b}{sen\ B} \quad \text{donde} \quad \frac{a}{sen\ 62°}=\frac{15}{sen\ 42°}$$

Al despejar a:

$$a=\frac{(15)(sen\ 62°)}{sen\ 42°}=\frac{(15)(0.8829)}{0.6691}=19.8\ cm$$

2 En el triángulo MNP, $\angle P = 76°$, $p = 12\ cm$ y $m = 8\ cm$. Resuelve el triángulo.

Solución



Con los datos del problema, se calcula el valor de $\angle M$ con la siguiente relación:

$$\frac{m}{sen\ M} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar *sen M y* sustituir los valores, se obtiene:

$$sen\ M = \frac{m\ sen\ P}{p} = \frac{(8)(sen\ 76°)}{12} = \frac{(8)(0.97029)}{12} = 0.6469$$

Entonces:

$$\angle M = arc\ sen\ (0.6469)$$

$$\angle M = 40°\ 18'$$

Por otro lado,

$$\angle N = 180° - \angle P - \angle M = 180° - 76° - 40°\ 18' = 63°\ 42'$$

Se aplica la ley de senos para encontrar el valor del lado n:

$$\frac{n}{sen\ N} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar n,

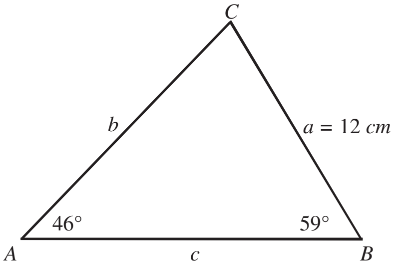
$$n = \frac{p\ sen\ N}{sen\ P} = \frac{(12)(sen\ 63°42')}{sen\ 76°} = \frac{(12)(0.8965)}{0.9703} = 11.09\ cm$$

Por consiguiente,

$$\angle M = 40°\ 18',\ \angle N = 63°\ 42' \text{ y } n = 11.09\ cm$$

3 En el triángulo ABC, $\angle A = 46°$, $\angle B = 59°$ y $a = 12\ cm$. Determina los elementos restantes del triángulo.

Solución



En el triángulo:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 46° - 59° = 75°$$

Para hallar el valor del lado c se utiliza la relación:

$$\frac{c}{sen\ C} = \frac{a}{sen\ A} \qquad \text{donde} \qquad c = \frac{a\ sen\ C}{sen\ A} = \frac{(12)(sen\ 75°)}{sen\ 46°} = \frac{(12)(0.9659)}{0.7193} = 16.11\ cm$$

Asimismo, para obtener el valor del lado b se utiliza la relación:

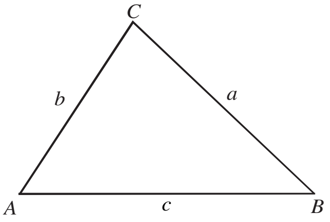
$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{a}{sen\ A} \qquad \text{donde} \qquad b = \frac{a\ sen\ B}{sen\ A} = \frac{(12)(sen\ 59°)}{sen\ 46°} = \frac{(12)(0.8571)}{0.7193} = 14.3\ cm$$

Finalmente, los elementos restantes son:

$$\angle C = 75°,\ c = 16.11\ cm \text{ y } b = 14.3\ cm$$

Ley de cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.



Ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$

Al despejar

La ley de cosenos se utiliza cuando:

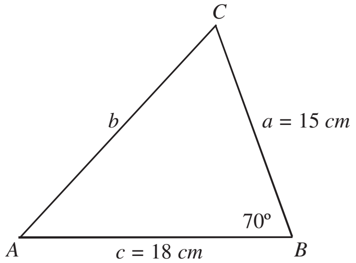
- Se tiene el valor de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se tiene el valor de los 3 lados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $a = 15\ cm$, $c = 18\ cm$, $\angle B = 70º$. Resuelve el triángulo.

Solución



Para calcular el valor del lado b se utiliza la fórmula:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Donde,

$$b = \sqrt{(15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18)\cos 70º} = \sqrt{225 + 324 - 2(15)(18)(0.34202)} = \sqrt{364.3}$$

$$b = 19.09\ cm$$

Conocidos los 3 lados del triángulo se calcula el valor de $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(19.09)^2 + (18)^2 - (15)^2}{2(19.09)(18)} = \frac{364.43 + 324 - 225}{687.24} = 0.6743$$

Donde: $\angle A = \text{arc}\cos 0.6743 = 47° 36'$

Por último, se determina la medida de $\angle C$:

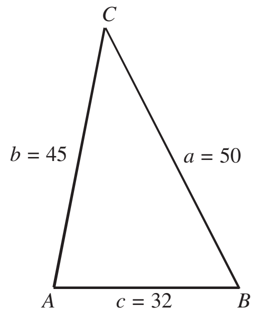
$$\angle C = 180º - \angle A - \angle B = 180° - 47° 36' - 70° = 62° 24'$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo ABC son:

$$b = 19.09\ cm,\ \angle A = 47° 36' \text{ y } \angle C = 62° 24'$$

2 En el triángulo *ABC*, $a = 50$, $b = 45$, $c = 32$. Resuelve el triángulo.

Solución



Para obtener $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(45)^2+(32)^2-(50)^2}{2(45)(32)} = \frac{2\,025+1024-2\,500}{2\,880} = 0.1906$$

Donde,

$$\angle A = \arccos 0.1906 = 79º$$

Para obtener $\angle B$:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(50)^2+(32)^2-(45)^2}{2(50)(32)} = \frac{2\,500+1\,024-2\,025}{3200} = 0.4684$$

Donde,

$$\angle B = \arccos 0.4684 = 62°\ 4'$$

Para calcular $\angle C$:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 79° - 62°\ 4' = 38°\ 56'$$

Por consiguiente, los ángulos del triángulo *ABC* son:

$$\angle A = 79°,\ \angle B = 62°\ 4' \text{ y } \angle C = 38°\ 56'$$

Ley de tangentes

En todo triángulo oblicuángulo la razón entre la diferencia de 2 lados y la suma de los mismos, es igual a la razón entre la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a cada uno de los lados, y la tangente de la semisuma de dichos ángulos.

Fórmulas:

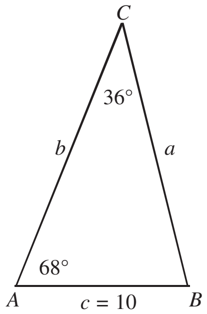
$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)},\quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \text{ y } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $c = 10$, $A = 68°$, $C = 36°$. Resuelve el triángulo.

Solución



Se determina el $\angle B$:

$$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 68° - 36° = 76°$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado a:

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle A = 68°$ y $\angle C = 36°$, se obtiene:

$$\frac{a-10}{a+10} = \frac{tan\left(\frac{68°-36°}{2}\right)}{tan\left(\frac{68°+36°}{2}\right)} = \frac{tan\ 16°}{tan\ 52°} = \frac{0.2867}{1.2799} = 0.2240$$

Entonces, de la expresión resultante:

$$\frac{a-10}{a+10} = 0.2240$$

Se despeja a:

$$a - 10 = 0.2240a + 2.240 \quad \rightarrow \quad a - 0.2240a = 2.240 + 10$$

$$0.776a = 12.240$$

$$a = \frac{12.240}{0.776}$$

$$a = 15.77\ cm$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado b:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle B = 76°$ y $\angle C = 36°$, se determina que:

$$\frac{b-10}{b+10} = \frac{tan\left(\frac{76°-36°}{2}\right)}{tan\left(\frac{76°+36°}{2}\right)} = \frac{tan\ 20°}{tan\ 56°} = \frac{0.3639}{1.4826} = 0.2454$$

De la expresión resultante,

$$\frac{b-10}{b+10} = 0.2454$$

Se despeja b:

$$b - 10 = 0.2454b + 2.454 \quad \rightarrow \quad b - 0.2454b = 10 + 2.454$$

$$0.7546b = 12.454$$

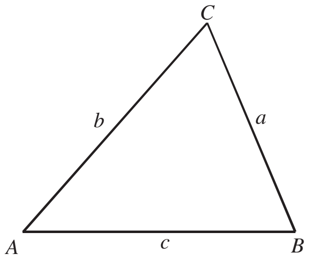
$$b = 16.5\ cm$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo son:

$$\angle B = 76°,\ a = 15.77\ cm \text{ y } b = 16.5\ cm$$

EJERCICIO 53

Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo de acuerdo con los datos proporcionados.



1. $\angle B = 57^\circ\, 20'$, $\angle C = 43^\circ\, 39'$, $b = 18$
2. $\angle A = 63^\circ\, 24'$, $\angle C = 37^\circ\, 20'$, $c = 32.4$
3. $\angle A = 85^\circ\, 45'$, $\angle B = 26^\circ\, 31'$, $c = 43.6$
4. $\angle C = 49^\circ$, $\angle A = 54^\circ\, 21'$, $a = 72$
5. $\angle B = 29^\circ$, $\angle C = 84^\circ$, $b = 12.3$
6. $\angle A = 32^\circ$, $\angle B = 49^\circ$, $a = 12$
7. $a = 5$, $\angle A = 32^\circ$, $b = 8$
8. $c = 13$, $b = 10$, $\angle C = 35^\circ\, 15'$
9. $\angle B = 56^\circ\, 35'$, $b = 12.7$, $a = 9.8$
10. $a = 9$, $c = 11.5$, $\angle C = 67^\circ\, 21'$
11. $a = 15$, $b = 16$, $c = 26$
12. $a = 32.4$, $b = 48.9$, $c = 66.7$
13. $a = 100$, $b = 88.7$, $c = 125.5$
14. $a = 15$, $b = 12$, $c = 20$
15. $a = 12$, $b = 15$, $\angle C = 68^\circ$
16. $a = 28$, $c = 32$, $\angle B = 76^\circ$
17. $b = 45$, $c = 75$, $\angle A = 35^\circ$
18. $a = 12.6$, $b = 18.7$, $\angle C = 56^\circ$

Demuestra que para el triángulo se cumple:

- $\dfrac{a}{sen\ A} = \dfrac{b}{sen\ B} = \dfrac{c}{sen\ C}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

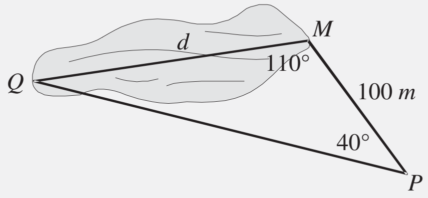
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para calcular la distancia entre 2 puntos a las orillas de un lago, se establece un punto P a 100 metros del punto M; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110°$ y $\angle P = 40°$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos M y Q?

Solución

Se realiza una figura que represente el problema:



De acuerdo con los datos se determina el valor de $\angle Q$:

$$\angle Q = 180° - 110° - 40° = 30°$$

Sea $\overline{MQ} = d$, entonces, al aplicar la ley de senos se obtiene:

$$\frac{d}{sen\ 40°} = \frac{100}{sen\ 30°}$$

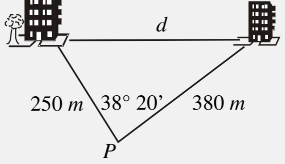
De la cual se despeja d:

$$d = \frac{(100)(sen\ 40°)}{sen\ 30°} = \frac{(100)(0.6427)}{0.5} = 128.54$$

En consecuencia, la distancia entre los puntos es de 128.54 metros.

2 Un observador se encuentra en un punto P que dista de 2 edificios, 250 m y 380 m, respectivamente. Si el ángulo formado por los 2 edificios y el observador es 38º 20’, precisa la distancia entre ambos edificios.

Solución



Sea d la distancia entre ambos edificios; entonces, por la ley de cosenos:

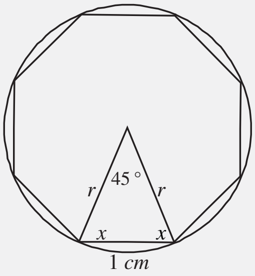
$$d = \sqrt{(250)^2 + (380)^2 - 2(250)(380)cos\ 38º20'} = \sqrt{62\,500 + 144\,400 - 149\,038.98} = 240.55$$

Finalmente, la distancia entre los edificios es de 240.55 m.

3 Se inscribe un octágono regular de lado 1 *cm* en una circunferencia; determina el área del círculo.

Solución

Si se inscribe un polígono regular en una circunferencia, la distancia del centro al vértice es el radio, si se trazan 2 radios a 2 vértices se forma un triángulo isósceles y la medida del ángulo central es $\frac{360°}{8} = 45°$, como lo muestra la figura:



Sea x la medida de cada ángulo de la base en un triángulo isósceles, entonces:

$$2x + 45º = 180º \quad \rightarrow \quad 2x = 135º \quad \rightarrow \quad x = \frac{135º}{2} = 67.5º$$

Por la ley de senos se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{sen\ 45º} = \frac{r}{sen\ 67.5º}$$

Al despejar r de la expresión anterior:

$$r = \frac{sen\ 67.5}{sen\ 45º} = 1.3\ cm$$

Luego, el área del círculo está dada por la expresión:

$$A = \pi\ r^2$$

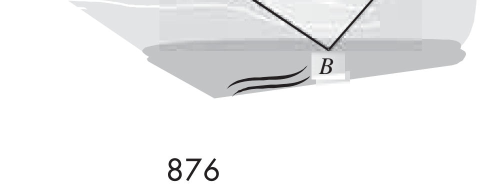
Se sustituye $r = 1.3\ cm$ y se obtiene:

$$A = \pi\ (1.3\ cm)^2 = 1.69\pi\ cm^2$$

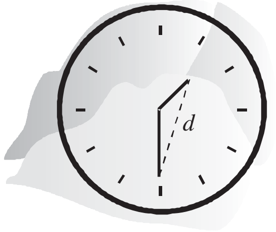
EJERCICIO 54

Resuelve los siguientes problemas:

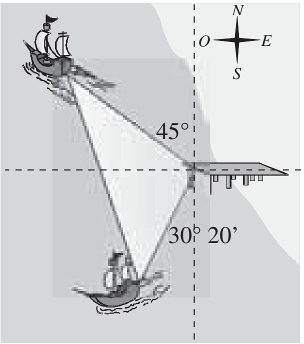
1. Para establecer la distancia desde un punto A en la orilla de un río a un punto B de éste, un agrimensor selecciona un punto P a 500 metros del punto A, las medidas de $\angle BAP$ y $\angle BPA$ son 38° y 47° 32'. Obtén la distancia entre A y B.



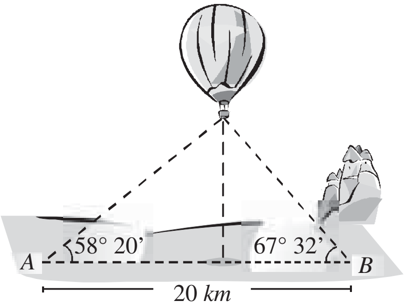
2. El horario y el minutero de un reloj miden respectivamente 0.7 y 1.2 *cm*. Determina la distancia entre los extremos de dichas manecillas a las 13:30 horas.



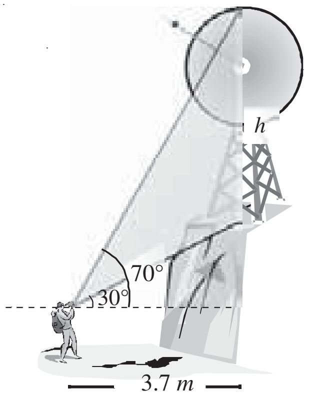
3. Un barco sale de un puerto a las 10:00 a.m. a 10 *km*/*h* con dirección sur 30°20’O. Una segunda embarcación sale del mismo puerto a las 11:30 *h* a 12 *km*/*h* con dirección norte 45°O. ¿Qué distancia separa a ambos barcos a las 12:30 horas?



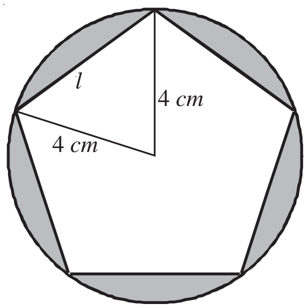
4. La distancia entre 2 puntos *A* y *B* es de 20 *km*. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de 58° 20’ y 67° 32’. ¿A qué altura del suelo se encuentra?



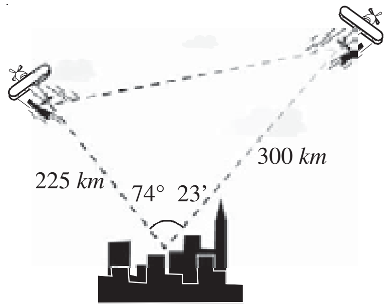
5. Una persona se encuentra a 3.7 *m* de un risco, sobre el cual se localiza una antena. La persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de 30° y la parte superior de ésta con un ángulo de 70°. Determina la altura de la antena.



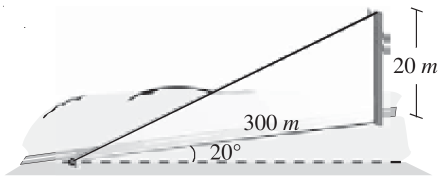
6. ¿Cuál es la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 centímetros de radio?



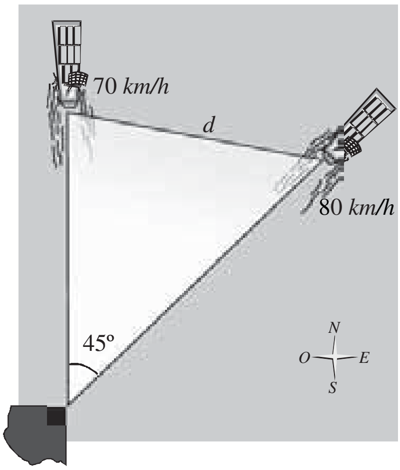
7. Dos aviones parten de una ciudad y sus direcciones forman un ángulo de 74° 23’. Después de una hora, uno de ellos se encuentra a 225 *km* de la ciudad, mientras que el otro está a 300 *km*. ¿Cuál es la distancia entre ambos aviones?



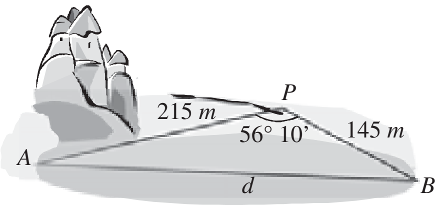
8. En un plano inclinado se encuentra un poste vertical de 20 metros de altura. Si el ángulo del plano con respecto a la horizontal es de 20°, calcula la longitud de un cable que llegaría de un punto a 300 metros cuesta abajo a la parte superior del poste.



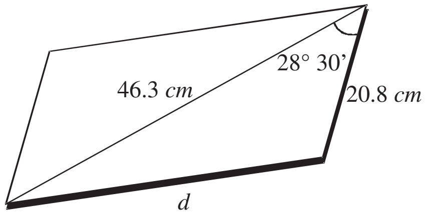
9. Un barco parte de un puerto y navega hacia el norte con una velocidad de 70 *km* por hora. Al mismo tiempo, pero en dirección noreste, otro buque viaja a razón de 80 *km* por hora. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro después de media hora?



10. La distancia que hay de un punto hacia los extremos de un lago son 145 y 215 metros, mientras que el ángulo entre las 2 visuales es de 56° 10'. Calcula la distancia entre los extremos del lago.

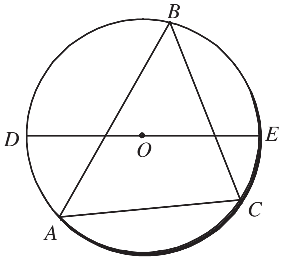


11. En un paralelogramo que tiene un lado que mide 20.8 *cm*, su diagonal mide 46.3 *cm*. Determina la longitud del otro lado si se sabe que el ángulo entre la diagonal y el primer lado es de 28° 30'.

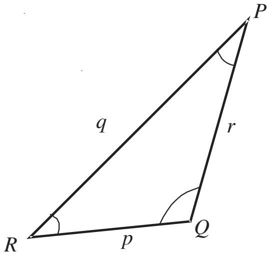


12. Si ΔABC triángulo cualquiera y $\overline{DE}$ es el diámetro de la circunferencia, demuestra que:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{sen\ C} = \frac{\overline{BC}}{sen\ A} = \frac{\overline{CA}}{sen\ B}$$



13. Observa la siguiente figura:



a) Demuestra que dado un lado y 2 ángulos adyacentes, el área del triángulo será:

$$A = \frac{r^2\ sen\ Q\ sen\ P}{2\ sen\ (Q+P)} = \frac{q^2\ sen\ P\ sen\ R}{2\ sen\ (P+R)} = \frac{p^2\ sen\ R\ sen\ Q}{2\ sen\ (R+Q)}$$

b) Demuestra que el área del triángulo está dada por cualquiera de las siguientes fórmulas:

- $A = \frac{1}{2} r^2\ sen\ P\ sen\ Q\ csc\ R$
- $A = \frac{2pqr}{p+q+r}\left[cos\left(\frac{1}{2}P\right)cos\left(\frac{1}{2}Q\right)cos\left(\frac{1}{2}R\right)\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 17

Forma trigonométrica de los números complejos

Reseña HISTÓRICA

Abraham de Moivre
(1667-1754)

Abraham de Moivre es conocido por la fórmula de Moivre y por su trabajo en la distribución normal y probabilidad. Fue amigo de Isaac Newton y Edmund Halley. En 1697 fue elegido miembro de Royal Society de Londres.

La fórmula de Moivre afirma que:

$$\forall x \in R \wedge \forall n \in Z\, (\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)^n = (\cos n\theta + i\ \mathrm{sen}\ n\theta)$$

Esta fórmula es importante porque conecta los números imaginarios con la trigonometría.

Forma trigonométrica o polar

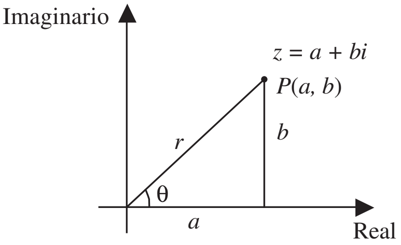
Sea el número complejo $z = a + bi$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ su valor absoluto y $\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right)$ el argumento o módulo de z, entonces su forma trigonométrica o polar se define como:

$$z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = r\ cis\ \theta = r\underline{|\theta} \quad \text{con } cos\ \theta + i\ sen\ \theta = cis\ \theta$$

Demostración

En el triángulo

$$cos\ \theta = \frac{a}{r},\ sen\ \theta = \frac{b}{r}$$



Al despejar a y b respectivamente

$$a = r\ cos\ \theta,\ b = r\ sen\ \theta$$

Si sustituyes en $z = a + bi$, obtienes:

$$z = r\ cos\ \theta + i\ r\ sen\ \theta = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = r\ cis\ \theta = r\underline{|\theta}$$

EJEMPLOS

1 Transforma el complejo $z = 4 + 3i$ a su forma trigonométrica con $0° \leq \theta \leq 360°$.

Solución

Se obtiene θ y r, entonces:

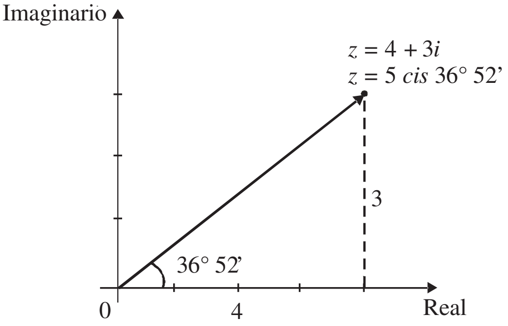
$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{3}{4}\right) = 36°\ 52'$$

$$r = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, la forma trigonométrica es:

$$z = 5(cos\ 36°\ 52' + i\ sen\ 36°\ 52')$$

$$z = 5\ cis\ 36°\ 52' = 5\underline{|36°52'}$$



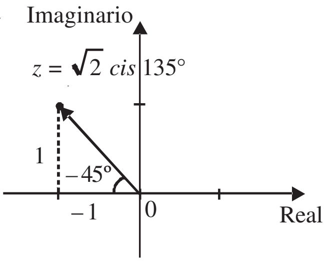
2 Transforma el complejo $z = -1 + i$ a su forma trigonométrica con $0° \leq \theta \leq 360°$.

Solución

Se obtiene θ y r, entonces:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$



Por tanto, la forma trigonométrica es:

$$z = \sqrt{2}\ (cos\ 135° + i\ sen\ 135°)$$

$$z = \sqrt{2}\ cis\ 135° = \sqrt{2}\underline{|135°}$$

Operaciones fundamentales

Multiplicación

Sean los complejos $z_1 = r_1\,(cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)$ y $z_2 = r_2\,(cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)$, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,[cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i\ sen\ (\theta_1 + \theta_2)] = r_1\ r_2\ cis\ (\theta_1 + \theta_2)$$

EJEMPLOS

1 Si $z_1 = 2(cos\ 60° + isen\ 60°)$ y $z_2 = \sqrt{2}\,(cos\ 45° + isen\ 45°)$, determina $z_1 \cdot z_2$.

Solución

Se aplica la definición del producto de dos números complejos

$$z_1 \cdot z_2 = (2)(\sqrt{2}\,)\ [cos\ (60° + 45°) + i\ sen\ (60° + 45°)] = 2\sqrt{2}\ \ [cos\ 105° + i\ sen\ 105°]$$

2 Determina $z_1 \cdot z_2$ si $z_1 = 4\ cis\dfrac{\pi}{6}$ y $z_2 = 3\ cis\dfrac{\pi}{12}$.

Solución

Aplicando la definición del producto

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\ r_2\ cis\ (\theta_1 + \theta_2) = (4)(3)\ cis\ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) = 12\ cis\frac{\pi}{4} = 12\underline{\left|\frac{\pi}{4}\right.}$$

División

Sean los complejos $z_1 = r_1\,(cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)$ y $z_2 = r_2\,(cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(cos\ \theta_1 + isen\ \theta_1\right)}{r_2\left(cos\ \theta_2 + isen\ \theta_2\right)} = \frac{r_1}{r_2}\ \left[cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + isen\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right] = \frac{r_1}{r_2} cis\left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{r_1}{r_2}\underline{\left|\theta_1 - \theta_2\right.}$$

EJEMPLOS

1 Sean $z_1 = 8(cos\ 50° + i\ sen\ 50°)$ y $z_2 = 4(cos\ 15° + i\ sen\ 15°)$, determina $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solución

Se aplica la definición del cociente de dos números complejos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{4}\left[cos\left(50° - 15°\right) + i\ sen\left(50° - 15°\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2[cos\ 35° + i\ sen\ 35°]$$

2 Encuentra $\dfrac{z_2}{z_1}$, si $z_1 = 12\left(cos\dfrac{\pi}{15} + i\ sen\dfrac{\pi}{15}\right)$ y $z_2 = 3\left(cos\dfrac{\pi}{3} + i\ sen\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Solución

Aplicando la definición del cociente:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{12}\left[cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right)\right]$$

Simplificando, se obtiene:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{4}\left[cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) + i\ sen\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right]$$

3 Si $z = \sqrt{2}\ cis\dfrac{\pi}{4}$, $z_1 = \sqrt{8}\ cis\dfrac{2\pi}{3}$, $z_2 = 2\ cis\dfrac{\pi}{12}$ y $z_3 = \dfrac{1}{2}\ cis\dfrac{5\pi}{6}$, determina $\dfrac{z \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}$.

Solución

Se realizan las operaciones del numerador y del denominador por separado:

$$z \cdot z_2 = \left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\right)\left(2cis\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_3 = \left(\sqrt{8}cis\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}cis\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{8}}{2}\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sen\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Por consiguiente la división se define como:

$$\frac{z \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = \frac{2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\ sen\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

Pero $-\dfrac{7\pi}{6}$ es igual al ángulo positivo $\dfrac{5\pi}{6}$, entonces:

$$\frac{z \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = 2\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

Potencia (fórmula de Moivre)

Dado el complejo $z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, entonces,

$$z^n = r^n\,(cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)$$

EJEMPLOS

1 Sean $z = 2(cos\ 15° + i\ sen\ 15°)$, encuentra z^2.

Solución

Aplicando la definición de la potencia para hallar z^2:

$$z^2 = 2^2(cos\ 2(15º) + i\ sen\ 2(15º)\ ) = 4(cos\ 30º + i\ sen\ 30º)$$

Es importante mencionar que algunos de los resultados están expresados en términos de un ángulo notable y se pueden sustituir por sus valores respectivos.

$$z^2 = 4(cos\ 30º + i\ sen\ 30º) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

2 Sea $z = \frac{1}{2}(\cos 36° + i \operatorname{sen} 36°)$, encuentra z^5.

Solución

Se aplica la definición de potencia de un número complejo

$$z^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\cos 5(36°) + i \operatorname{sen} 5(36°)\right) = \frac{1}{32}(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = \frac{1}{32}\left(-1 + i(0)\right) = -\frac{1}{32}$$

Por tanto, $z^5 = -\frac{1}{32}$

3 Si $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$ y $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, determina $\frac{z^2}{z_1}$.

Solución

Se obtiene la potencia de z:

$$z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

Se procede a realizar la división, entonces:

$$\frac{z^2}{z_1} = \frac{\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

Raíz

Sea el complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces su raíz enésima se define como:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

Donde k toma los valores 0, 1, 2, 3,…, $n - 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la raíz cúbica de $z = 8 \operatorname{cis} 240°$.

Solución

Las raíces se obtienen aplicando la definición y k adopta los valores de 0, 1 y 2, entonces:

Para $k = 0$

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{240° + 360°(0)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{240° + 360°(0)}{3}\right) = 2(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$$

Para $k = 1$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{240° + 360°(1)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{240° + 360°(1)}{3}\right) = 2(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$$

Para $k = 2$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{240° + 360°(2)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{240° + 360°(2)}{3}\right) = 2(\cos 320° + i \operatorname{sen} 320°)$$

2 Dado el número $z = 1$, determina $\sqrt[4]{z}$.

Solución

El número complejo $z = 1$ en su forma trigonométrica es $z = 1\ (\cos 0º + i \operatorname{sen} 0º)$, luego k adopta los valores de 0, 1, 2 y 3, entonces las raíces son:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0º+360º(0)}{4} + i\ \operatorname{sen}\frac{0º+360º(0)}{4}\right) = 1\ (\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 1$$

$$z_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0º+360º(1)}{4} + i\ \operatorname{sen}\frac{0º+360º(1)}{4}\right) = 1\ (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0º+360º(2)}{4} + i\ \operatorname{sen}\frac{0º+360º(2)}{4}\right) = 1\ (\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = -1$$

$$z_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0º+360º(3)}{4} + i\ \operatorname{sen}\frac{0º+360º(3)}{4}\right) = 1\ (\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = -i$$

En consecuencia, los valores de la raíz cuarta de $z = 1$ son los complejos $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -i$.

EJERCICIO **55**

Transforma a su forma trigonométrica los siguientes números complejos:

1. $z = 4 - i$
2. $z = \sqrt{3} + i$
3. $z = -2 + 2i$
4. $z = 5$
5. $z = -3i$
6. $z = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$
7. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
8. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Sean los complejos $z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 45º$, $z_2 = \sqrt{13}\ \ cis\frac{\pi}{6}$, $z_3 = 2\ cis\ 60º$ y $z_4 = \sqrt{2}\ \ cis\frac{3\pi}{4}$, determina:

9. $z_1 \cdot z_2$
10. $z_2 \cdot z_4$
11. $z_1 \cdot z_3$
12. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
13. $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4$
14. $\frac{z_1}{z_4}$
15. $\frac{z_2}{z_4}$
16. $\frac{z_1}{z_3}$
17. $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$
18. $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_4}$
19. $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_4}$
20. $\frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z_4}$

Resuelve lo que se te pide.

21. Si $z = 3\ cis\ 120º$, determina z^2
22. Encuentra z^4 si $z = 3(cos\ 25º + i\ sen\ 25º)$
23. Determina z^3 si $z = 5\ cis\ 15º$
24. Encuentra $\sqrt{z}$ si $z = 16\left(cos\frac{\pi}{3} + i\ sen\frac{\pi}{3}\right)$
25. Si $z = 64\ cis\ 120º$, determina $\sqrt[6]{z}$
26. Encuentra $\sqrt[3]{z}$ si $z = -1$
27. Si $z = 4\ cis\frac{\pi}{9}$ y $z_1 = \frac{3}{2}cis\frac{2\pi}{9}$, determina $(z \cdot z_1)^2$
28. Si $z = 2(cos\ 30º + i\ sen\ 30º)$ y $z_1 = 4(cos\ 60º + i\ sen\ 60º)$, determina $\sqrt[3]{z \cdot z_1}$
29. Encuentra el resultado de: $\left[2(cos\ 32º + i\ sen\ 32º)\right]^2 \cdot 7(cos\ 36º + i\ sen\ 36º)$
30. Determina el resultado de: $\left[8\left(cos\frac{\pi}{12} + i\ sen\frac{\pi}{12}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente